$$= 4\int_{\phi}^{1/2} dx - 2\int_{1/2}^{\phi} \frac{1-x-2}{1-x}\,dx = 4[x]_{\phi}^{1/2} - 2[x + 2\log(1-x)]_{1/2}^{\phi} = 3 + 4\log\tfrac{1}{2} =$$

$$= 3 - 4\log 2 .$$

3) Calcolare l'integrale:

$$\int_{\Gamma} \frac{2}{z}\,dx - \frac{1}{z}\,dy + \frac{y-2x}{z^2}\,dz$$

dove Γ è il segmento congiungente i punti $P_1(\phi,\phi,2)$ e $P_2(1,1,1)$ orientato da P_1 a P_2.

3) Posto:
$$\begin{cases} X(x,y) = 2/z \\ Y(x,y) = -1/z \\ Z(x,y,z) = \dfrac{y-2x}{z^2} \end{cases} \Rightarrow I = \int_{\Gamma} X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz .$$

Vediamo se la forma differenziale lineare è esatta:

$$X_y(x,y,z) = \frac{\phi}{z^2} = \phi,\quad Y_x(x,y,z) = \frac{\phi}{z^2} = \phi \quad (Y_x = X_y)$$

$$X_z = \frac{-2}{z^2},\quad Z_x = \frac{-2z^2 - 2z(y-2x)}{z^4} = \frac{-2z^2 - 2y - 4x}{z^4} = -\frac{2}{z^2} \quad (X_z = Z_x).$$

$Y_z = 1/z^2 = Z_y \Rightarrow$ la forma è esatta.

Però sia X, Y, Z sia Y_z, Z_y, X_z, Z_x sono definite per $z \neq \phi$. Si noti però che il segmento in esame è definito nel semispazio dove $z > \phi$. Perciò si ha:

$$f(x,y,z) = \int_{\phi}^{x} \frac{2}{z}\,dx + \int_{\phi}^{y}\left(-\frac{1}{z}\right)dy + c = \frac{2x}{z} - \frac{y}{z} + c$$

visto che $x_\phi = \phi, y_\phi = \phi, z_\phi = ? > \phi$. Inoltre:

$$\int_{\Gamma} \frac{2}{z}\,dx - \frac{1}{z}\,dy + \frac{y-2x}{z^2}\,dz = f(1,1,1) - f(\phi,\phi,2) = 1.$$

4) Calcolare l'integrale:

$$I = \int_{\Gamma} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

dove Γ è la circonferenza di centro $O(\phi,\phi)$ e raggio $R=1$.

4) Posto:
$$\begin{cases} X(x,y) = -y/x^2+y^2 \\ Y(x,y) = x/x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_y = -x^2+y^2/(x^2+y^2)^2 \\ Y_x = -x^2+y^2/(x^2+y^2)^2 \end{cases} \Rightarrow X_y = Y_x \Rightarrow \text{la forma è esatta.}$$

Però sia X, Y, X_y, Y_x non sono definite per $x=\phi$ e $y=\phi$ (origine). Quindi:

$$f(x,y)=\int_\Gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=\int_\phi^{2\pi}\left(\frac{-\operatorname{sen}\vartheta}{1}(-\operatorname{sen}\vartheta)+\frac{\cos\vartheta}{1}\cos\vartheta\right)d\vartheta=$$

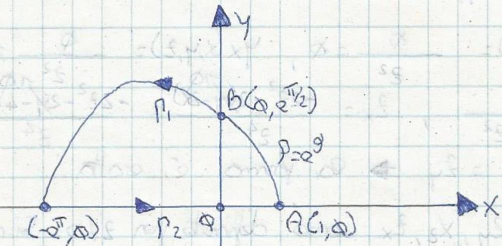
$$=\int_\phi^{2\pi}\left(\underbrace{+\operatorname{sen}^2\vartheta+\cos^2\vartheta}_{1}\right)d\vartheta=\int_\phi^{2\pi}d\vartheta=[\vartheta]_\phi^{2\pi}=2\pi-\phi=2\pi.$$

Abbiamo posto:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta=\cos\vartheta \\ y=\rho\operatorname{sen}\vartheta=\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \quad \text{con } \rho=1 \quad \text{e} \quad \phi\le\vartheta\le 2\pi$$

$$\begin{cases} dx=-\operatorname{sen}\vartheta \\ dy=\cos\vartheta \end{cases}$$

5) Calcolare il lavoro compiuto dal vettore $\vec{V}=y\vec{i}-x\vec{j}$ quando il suo punto di applicazione descrive la linea $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ disegnata in figura, nel verso indicato.



5) Siccome:

$$L=\int_\Gamma \vec{V}\times d\vec{P}=\int_\Gamma y\,dx-x\,dy$$

Posto $y=X(x,y)$ e $Y(x,y)=-x$, la forma differenziale non è esatta. Infatti:

$$Y_x=-1,\quad X_y=1$$

Per questo motivo, anche se la linea è chiusa, $L\neq\phi$.

$$\Gamma_1:\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta=e^\vartheta\cos\vartheta \\ y=\rho\operatorname{sen}\vartheta=e^\vartheta\operatorname{sen}\vartheta \end{cases},\quad \phi\le\vartheta\le\pi$$

$$\Gamma_2:\begin{cases} x=x \\ y=\phi \end{cases}\quad -e^\pi\le x\le 1$$

$$\Downarrow$$

$$L=\int_\phi^\pi\left(e^\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\,(e^\vartheta\cos\vartheta-e^\vartheta\operatorname{sen}\vartheta)-e^\vartheta\cos\vartheta\,(e^\vartheta\operatorname{sen}\vartheta+e^\vartheta\cos\vartheta)\right)d\vartheta=-\int_\phi^{2\pi}e^{2\vartheta}\,d\vartheta=-\left[\frac{e^{2\vartheta}}{2}\right]_\phi^{2\pi}=$$

$$=\tfrac{1}{2}(1-e^{2\pi}).$$

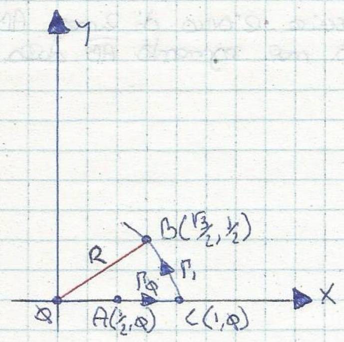
6) Calcolare l'integrale:

$$I = \int_{\Gamma} \frac{2x^3+y^3+xy(x+2y)+y}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)}\,dx + \frac{2y^3+xy(2x-y)-x^3-x}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)}\,dy$$

dove Γ è una linea generalmente regolare che congiunge i punti $A(\frac{1}{2},0)$ e $B(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$, orientata da A verso B.

6) Posto:
$$\begin{cases} X(x,y) = \dfrac{2x^3+y^3+xy(x+2y)+y}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)} \\ Y(x,y) = \dfrac{2y^3+xy(2x-y)-x^3-x}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)} \end{cases} \Rightarrow X_y = Y_x \Rightarrow \text{la forma differenziale è esatta}$$

Calcolare però l'integrale nella solita maniera può risultare complesso. Si osservi però che:



$R=1 \Rightarrow$ circonferenza di raggio unitario

Per comprendere i valori di B e perché esso è un punto della circonferenza "goniometrica" si riguardi la sezione riguardante il ripasso di matematica. Dunque:

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

$$\Gamma_0: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases}, \ \frac{1}{2} \le t \le 1 \qquad , \ \Gamma_1: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\operatorname{sen} t\,dt \\ dy = \cos t\,dt \end{cases}$$

Dunque:

$$I = \int_{\Gamma_1} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy + \int_{\Gamma_2} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2t^3}{t^2(t^2+1)}\,dt + \int_0^{\pi/6} \Bigg(\Bigg[\frac{2\cos^3 t + \operatorname{sen}^3 t + \cos t \operatorname{sen} t(\cos t + 2\operatorname{sen} t) + \operatorname{sen} t}{2} \Bigg] (-\operatorname{sen} t) + \Bigg[\frac{2\operatorname{sen}^3 t + \cos t \operatorname{sen} t(2\cos t - \operatorname{sen} t) - \cos^3 t - \cos t}{2} \Bigg] (\cos t) \Bigg) dt = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t}{t^2+1}\,dt + \int_0^{\pi/6} \Bigg(\frac{-2\cos^3 t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^4 t - \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t - 2\cos t \operatorname{sen}^3 t - \operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen}^3 t \cos t + 2\cos^3 t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t - \cos^4 t - \cos^2 t}{2} \Bigg) dt$$

$$= \left[\log(1+t^2)\right]_{1/2}^{1} + \int_0^{\pi/6}\left(\frac{-2\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2 t - \mathrm{sen}^4 t - \mathrm{sen}^2 t - \cos^4 t - \cos^2 t}{2}\right)dt = \log 2 - \log 5/4 -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}\left(\mathrm{sen}^2 t\,(\underbrace{\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t}_{1}) + \mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t\,(\underbrace{\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t}_{1}) + \cos^2 t\right)dt =$$

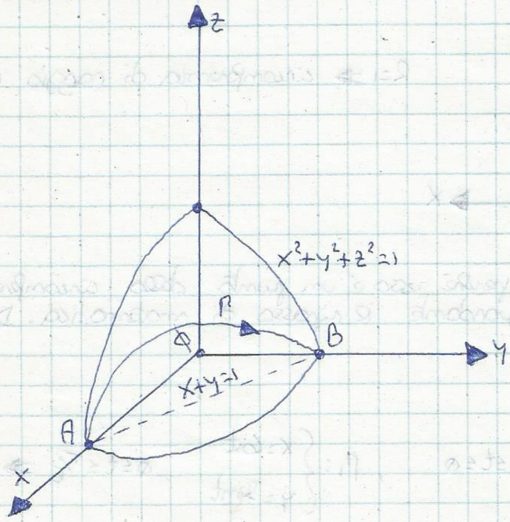
$$= \log 2 - \log 5/4 - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}\left(\mathrm{sen}^2 t + \mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t + \cos^2 t\right)dt = \log 2 - \log 5/4 - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}$$

$$2\,dt = \log 2 - \log 5/4 - [t]_0^{\pi/6} = \log 2 - \log 5/4 - \pi/6$$

7) Calcolare il lavoro compiuto dal vettore:

$$\vec{V} = ye^x\,\vec{i} - \vec{j} + z\vec{k}$$

quando il suo punto di applicazione descrive l'arco di linea $\widehat{AB}$ appartenente alla semisfera $x^2+y^2+z^2=1$, $z>0$ che si proietta nel segmento $\overline{AB}$ della retta $x+y=1$, orientata da A verso B.



7) Per definizione il lavoro è dato da: $L = \int_\Gamma \vec{V} \times d\vec{p} = \int_\Gamma ye^x\,dx - dy + z\,dz$

Posto:

$$\begin{cases} X(x,y,z) = ye^x \\ Y(x,y,z) = -1 \\ Z(x,y,z) = z \end{cases}$$

Si vede subito che $X_y \neq Y_x$ e dunque la forma differenziale lineare non è esatta. Quindi posto:

$$\Gamma: \begin{cases} x = x \\ y = 1-x \\ z = \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases} = \sqrt{1-x^2-(1-x)^2} = \sqrt{1-x^2-1-x^2+2x} = \sqrt{2x(1-x)}$$

Poiché Γ è orientata da A verso B, x varia tra 1 e ϕ. Quindi:

$$\begin{cases} dy = -dx \\ dz = \dfrac{1-2x}{\sqrt{2x(1-x)}}\,dx \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$L = \int_1^{\phi}\left((1-x)e^x + 1 + \sqrt{2x(1-x)}\,\frac{1-2x}{\sqrt{2x(1-x)}}\right)dx = \int_1^{\phi}\left(e^x - xe^x + 1 + 1 - 2x\right)dx =$$

$$= \int_1^{\phi} e^x\,dx - \int_1^{\phi} xe^x\,dx + \int_1^{\phi}(2-2x)\,dx = [e^x]_1^{\phi} - \int_1^{\phi} xe^x\,dx + 2\int_1^{\phi} dx - 2\int_1^{\phi}$$

$$x\,dx = 1 - e - \int_1^{\phi} xe^x\,dx + 2[x]_1^{\phi} - \cancel{2}\left[\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_1^{\phi} = 1 - e - \int_1^{\phi} xe^x\,dx + \phi - 2 + 1 =$$

$$= 1 - e - \left[e^x(x-1)\right]_1^{\phi} - 1 = 1 - e + \cancel{1} - \cancel{1} = 1 - e.$$

Si noti che:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$$

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = e^x \end{cases}$$

8) Determinare il parametro α in modo che il vettore:

$$V(x,y,z) = 2xz\vec{i} + (\alpha^2 + 2\alpha)z^2\vec{j} + (6yz + \alpha x^2)\vec{k}$$

risulti il gradiente di un potenziale $f(x,y,z)$. In corrispondenza a tale valore del parametro calcolare il lavoro di $\vec{V}$ quando il suo punto di applicazione descrive una linea Γ generalmente regolare congiungente i punti $A(3,2,1)$ e $B(1,2,3)$, orientata da A verso B.

8) Posto: $X(x,y,z) = 2xz$, $Y(x,y,z) = (\alpha^2+2\alpha)z^2$, $Z(x,y,z) = (6yz + \alpha x^2)$

$$\begin{cases} X_y = \phi \\ Y_x = \phi \\ X_z = 2x \\ Z_x = 2\alpha x \end{cases}, \quad Y_z = 2(\alpha^2+2\alpha)z, \quad Z_y = 6$$

$X, Y, Z, X_y, Y_x, X_z, Z_x, Y_z, Z_y$ sono continue $\forall x,y,z$.

La condizione necessaria e sufficiente affinché $\vec{V}$ sia il gradiente di un potenziale $f(x,y,z)$ è che: $\mathrm{Rot}\,\vec{V} = \phi$, cioè:

$$X_y = Y_x, \quad Z_x = X_z, \quad Z_y = Y_z$$

$$\Downarrow$$

La prima espressione è sempre verificata, la seconda lo è per:

$$2x = 2\alpha x \Rightarrow \alpha = 1$$

La terza espressione è verificata quando

$$6z = 2(\alpha^2+2\alpha)z \Rightarrow \alpha^2+2\alpha = 3 \Rightarrow \Delta = b^2-4ac = 4+12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

Quindi solo per $\alpha=1$ esiste un potenziale $f(x,y,z)$ di cui $\vec{V}$ è il gradiente. Per $\alpha=1$ si ha inoltre:

$$Y(x,y,z) = 3z^2, \quad Z(x,y,z) = 6yz + x^2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y,z) = \int_0^x 2xz\,dx + \int_0^y 3z^2\,dy + \int_0^z 0 = \int_0^x 2xz\,dx + \int_0^y 3z^2\,dy = \left[zx^2\right]_0^x + \left[3z^2y\right]_0^y =$$

$$= x^2z + 3z^2y$$

Siccome:

$$L = \int_\Gamma \vec{V} \times d\vec{r} = f(B) - f(A) = 42.$$

9) Si consideri nel quadrante $\pi = \{x>0, y>0\}$ il campo vettoriale $\vec{V}(x,y) = \phi(x)(1+x)\log y\,\vec{i} + \frac{x\phi(x)}{y}\vec{j}$, $\phi(x) \in C^1(0,+\infty)$. Determinare la funzione $\phi(x)$ in modo da soddisfare le seguenti condizioni:

a) Il campo vettoriale considerato risulti conservativo.

b) Il lavoro compiuto da $\vec{V}(x,y)$ quando il suo punto di applicazione descrive una linea generalmente regolare contenuta in π, congiungente i punti $A(2,e)$ e $B(1,1)$, percorsa da B verso A, risulti uguale ad 1.

9) a) Posto: $\begin{cases} X(x,y) = \phi(x)(1+x)\log y \\ Y(x,y) = \frac{1}{y}\phi(x)x \end{cases}$ X, Y, Y_x, X_y sono definite e continue in π.

Perché $\vec{V}$ sia conservativo è sufficiente e necessario che:

$$X_y = Y_x \quad \text{cioè:}$$

$$\frac{1}{y}\phi(x)(1+x) = \frac{1}{y}\left(\phi(x) + x\phi'(x)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\phi(x) = \phi'(x) \quad (x>0).$$

L'unica funzione che possiede questa proprietà è: