Quest'ultima espressione equivale ad ammettere che:

$$df = X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$$

Supponendo che:

- $dy = \emptyset \Rightarrow \partial f/\partial x \, dx = X(x,y)\,dx \Rightarrow \partial f/\partial x = X(x,y)$
- $dx = \emptyset \Rightarrow \partial f/\partial y \, dy = Y(x,y)\,dy \Rightarrow \partial f/\partial y = Y(x,y)$

Derivando poi la prima rispetto a y e la seconda rispetto a x si ottiene:

$$\partial^2 f/\partial x \partial y = \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} \quad , \quad \partial^2 f/\partial x \partial y = \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$$

Per il teorema di Schwartz si ha che:

$$\boxed{\frac{\partial X(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}}$$

Si noti che quest'ultima espressione equivale alla scrittura $X_y = Y_x$. Dimostriamo ora la condizione sufficiente. Per dimostrare tale condizione partiamo dal fatto che vogliamo trovare una generica funzione $f(x,y)$ che soddisfi alla seguente relazione:

$$\partial f/\partial x = X(x,y)$$

Questa funzione è tale che:

$$\boxed{f(x,y) = \int_{x_0}^{x} X(x,y)\,dx + \varphi(y)}$$

dove $\varphi(y)$ è una generica funzione di y. Qui x_0 è un punto appartenente all'intervallo a-b. Facciamo ora in modo che la $f(x,y)$ soddisfi anche la seguente relazione:

$$\partial f/\partial y = Y(x,y)$$

si ha dunque:

$$\partial/\partial y \int_{x_0}^{x} X(x,y)\,dx + \varphi'(y) = Y(x,y)$$

e derivando sotto il segno di integrale si ottiene:

$$\int_{x_0}^{x} X_y(x,y)\,dx + \varphi'(y) = Y(x,y)$$

Siccome però:

$$\int_{x_0}^{x} X_y(x,y)\,dx = \int_{x_0}^{x} Y_x(x,y)\,dx = Y(x,y) - Y(x_0,y)$$

Perché l'espressione soddisfi la precedente relazione è necessario che:

$$\varphi'(y) = Y(x_0,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y)\,dy + c$$

Dunque:

$$\boxed{f(x,y) = \int_{x_0}^{x} X(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y)\,dy + c}$$

dove c è una costante arbitraria. Tale funzione viene detta integrale generale della assegnata forma differenziale. Posto:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = \int_{x_0}^{x} X(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y)\,dy + f(x_0,y_0)$$

Sia poi Γ una linea generalmente regolare, formata da due linee Γ_1 e Γ_2 regolari (si riguardi il precedente grafico), si ottiene:

$$\begin{matrix} \Gamma_1 = \{ x_0, y_0 \mapsto x_0, y \} \\ \Gamma_2 = \{ x_0, y \mapsto x, y \} \end{matrix} \Rightarrow \int_{\Gamma} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = \int_{\Gamma_1} Y(x_0,y)\,dy + \int_{\Gamma_2} X(x,y)\,dx$$

Si noti che si è potuto fare ciò solo per il fatto che su Γ_1 $dx = 0$ e su Γ_2 $dy = 0$.
Da questo segue che:

$$\boxed{f(x,y) = f(x_0,y_0) + \int_{\Gamma} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy}$$

Dunque se $X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$ è una forma differenziale lineare esatta e Γ è una qualsiasi linea congiungente i punti P_1 e P_2 di coordinate:

$P_1(x_0, y_0)$, $P_2(x,y)$

risulta:

$$\varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0) + \int_{\rho} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$$

Sotto queste ipotesi si suppone ovviamente che la linea ρ sia generalmente regolare. Siano poi:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

le equazioni parametriche della linea ρ. L'integrale precedente assume la seguente forma:

$$\int_{\rho} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(X(x(t),y(t))\,x'(t) + Y(x(t),y(t))\,y'(t) \right) dt$$

Siccome però:

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} X(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y)\,dy + \varphi(x_0,y_0)$$

e $\quad \dfrac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = X(x,y)$, $\dfrac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = Y(x,y)$

$$\Downarrow$$

$$X(x(t),y(t))\,x'(t) + Y(x(t),y(t))\,y'(t) = \frac{\partial \varphi(x(t),y(t))}{\partial x}\,x'(t) + \frac{\partial \varphi(x(t),y(t))}{\partial y}\,y'(t) = \frac{\partial \varphi(x(t),y(t))}{\partial t}$$

Da tutte queste considerazioni si ottiene:

$$\boxed{\int_{\rho} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \varphi(x(t),y(t))}{\partial t}\,dt}$$

Ovviamente:

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \varphi(x(t),y(t))}{\partial t}\,dt = \varphi(x(\beta),y(\beta)) - \varphi(x(\alpha),y(\alpha)) = \varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0)}$$

cioè se una forma differenziale lineare è esatta, la $\varphi(x,y)$ non dipende dal percorso di ρ, ma solo dai suoi estremi (P_1, P_2).

La stessa cosa vale per le forme differenziali lineari a tre variabili, come per esempio:

$$\boxed{X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz}$$

Il seguente integrale:

$$\boxed{\int_P X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz}$$

viene detto integrale della forma lineare esteso a P. Questa forma differenziale si dice esatta quando esiste una funzione $f(x,y,z)$ tale che:

$$\boxed{df = X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz}$$

Anche qui vale la condizione necessaria e sufficiente per l'esattezza della forma. In particolare la precedente forma è esatta quando $\forall (x,y,z) \in T$ si ha:

$$\boxed{X_y = Y_x \quad , \quad Z_x = X_z \quad , \quad Y_z = Z_y}$$

dove T è un dominio in cui $X, Y, Z, X_y, Y_x, Z_x, X_z, Y_z, Z_y$ sono definite e continue, ed è tale che:

$$T = \{ a \le x \le b, \; c \le y \le d, \; k \le z \le h \}$$

Vediamo brevemente di dimostrare questa condizione esaminando prima la condizione necessaria. Si suppone che:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = X(x,y,z) \quad , \quad \partial f/\partial y = Y(x,y,z) \quad , \quad \partial f/\partial z = Z(x,y,z)$$

e quindi per il teorema di Schwartz:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
- $\partial^2 f/\partial y \partial z = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$
- $\partial^2 f/\partial z \partial x = \partial^2 f/\partial x \partial z$

Per quanto riguarda invece la condizione sufficiente si ha:

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} X(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y,z)\,dy + \varphi(z)$$

Questa funzione soddisfa le due seguenti condizioni:

$$\partial f/\partial x = X(x,y,z) \quad , \quad \partial f/\partial y = Y(x,y,z)$$

Perché la precedente funzione possa soddisfare anche la seguente relazione:

$$\partial f/\partial z = Z(x,y,z)$$

deve essere:

$$Z(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} X_z(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y_z(x_0,y,z)\,dy + \varphi'(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{Z(x,y,z)} = \cancel{Z(x,y,z)} - \cancel{Z(x_0,y,z)} + \cancel{Z(x_0,y,z)} - Z(x_0,y_0,z) + \varphi'(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi'(z) = Z(x_0,y_0,z)$$

Integrando si ottiene:

$$\boxed{\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} Z(x_0,y_0,z)\,dz + C}$$

Dunque si ha:

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} X(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} Z(x_0,y_0,z)\,dz + C$$

Posto:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \Rightarrow f(x_0,y_0,z_0) = C$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} X(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} Z(x_0,y_0,z)\,dz + f(x_0,y_0,z_0)}$$

Con procedimenti analoghi a quelli già descritti precedentemente si ottiene:

$$\boxed{f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \int_{\Gamma} X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz}$$

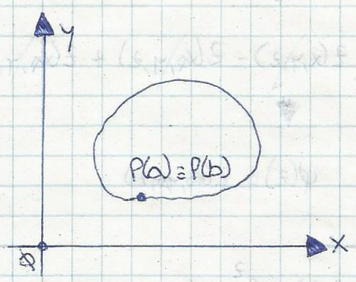
In merito si riveda la precedente dimostrazione. Vediamo ora alcune proprietà delle forme differenziali lineari esatte:

1) L'integrale di una forma differenziale lineare esatta dipende solo dai suoi estremi di integrazione. La dimostrazione è già stata svolta in precedenza.

2) Tale integrale, calcolato su una linea Γ chiusa contenuta nel dominio T, è nullo. Si ricordi che una linea chiusa è una linea dove:

$$P(a) = P(b) \rightarrow \text{ESTREMI DELLA LINEA}$$

con a, b estremi dell'intervallo base. Graficamente:



Vediamo ora di introdurre il concetto di Rotore. Prendiamo in esame un vettore $\vec{F}$ di componenti X, Y, Z:

$$\boxed{\vec{F} = \vec{i}\,X(x,y,z) + \vec{j}\,Y(x,y,z) + \vec{k}\,Z(x,y,z)}$$

si definisce rotore di $\vec{F}$, e lo si denota con $\mathrm{Rot}\,\vec{F}$, il determinante della seguente matrice:

$$\mathrm{Rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \vec{i}\,(Z_y - Y_z) + \vec{j}\,(X_z - Z_x) + \vec{k}\,(Y_x - X_y)$$

Dunque condizione necessaria e sufficiente perché la forma differenziale lineare in questione sia esatta è che in tutto il dominio T risulti:

$$\boxed{\text{Rot}\,\vec{F} = \emptyset}$$

Il corrispondente integrale viene definito potenziale del vettore $\vec{F}$. Si ricordi inoltre che se il rotore del vettore $\vec{F}$ è nullo, allora il campo su cui si trova il vettore è un campo conservativo. Infine ricordandosi che il gradiente è:

$$\boxed{\nabla\varphi = \text{Grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{u}_z}$$

e siccome:

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{i}\,X(x,y,z) + \vec{j}\,Y(x,y,z) + \vec{k}\,Z(x,y,z)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nabla\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

Perciò condizione necessaria e sufficiente affinché un vettore $\vec{F}$ sia, in T, il gradiente di un potenziale φ, è che sia identicamente nullo il vettore Rot $\vec{F}$.

*ESERCIZI:

1) Calcolare l'integrale:

$$I = \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{2^x} - y\right) dx - (x-2y)\, dy$$

dove Γ è una linea generalmente regolare congiungente i punti $A(\emptyset,\emptyset)$ e $B(-1,-1)$, orientata da A verso B.

1) $\begin{cases} X = \left(\frac{x}{2^x} - y\right) \\ Y = -(x-2y) \end{cases} \Rightarrow I = \int_{\Gamma} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$

$\begin{cases} X_y = -1 \\ Y_x = -1 \end{cases} \Rightarrow X_y = Y_x \Rightarrow$ La forma differenziale è esatta.

Inoltre X, Y, Y_x, X_y sono definite e continue $\forall x,y$. Dunque l'integrale non dipende dalla linea Γ ma solo dai suoi estremi. Posto:

$\begin{cases} x_\emptyset = \emptyset \\ y_\emptyset = \emptyset \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = \int_\emptyset^x \left(\frac{x}{2^x} - y\right) dx + \int_\emptyset^y 2y\,dy$, siccome $x_\emptyset = \emptyset$ $\left(\int_\emptyset^y Y(x_\emptyset,y)\,dy\right)$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y)=\int_0^x x\cdot 2^{-x}\,dx -yx+y^2+C = -x\frac{2^{-x}}{\log 2}+\int_0^x \frac{2^{-x}}{\log 2}\,dx - xy+y^2+C=$$

$$=-\frac{2^{-x}}{\log 2}\left(x+1/\log 2\right)-xy+y^2+C \Rightarrow f(-1,-1)-f(0,0)=-\frac{2}{\log 2}\left(1/\log 2-1\right)+1/\log^2 2=$$

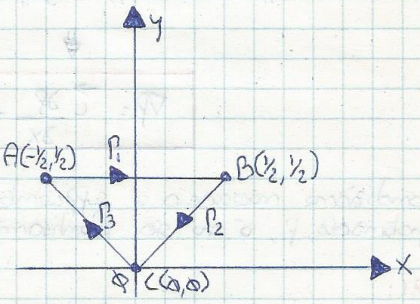
$$=2/\log 2-1/\log^2 2$$

Si noti che: $\int_0^x x\cdot 2^{-x}\,dx = -x\frac{2^{-x}}{\log 2}+\int_0^x\frac{2^{-x}}{\log 2}\,dx$, posto $\begin{cases} f(x)=-x\\ g'(x)=2^{-x}\end{cases}$

2) Calcolare l'integrale:

$$I=\int_\Gamma \frac{1+x}{1-y}\,dx+\frac{1+y}{1-x}\,dy$$

dove $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ è la linea chiusa ABCA riportata in figura.



2) Posto: $\begin{cases} X(x,y)=\dfrac{1+x}{1-y}\\ Y(x,y)=\dfrac{1+y}{1-x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_y(x,y)=\dfrac{1-y-1-x}{(1-y)^2}=\dfrac{-y-x}{(1-y)^2}\\ Y_x(x,y)=\dfrac{1-x-1-y}{(1-x)^2}=\dfrac{-x-y}{(1-x)^2}\end{cases} \Rightarrow Y_x\neq X_y$

Dunque la forma differenziale non è esatta. Vediamo le equazioni delle singole linee:

$\Gamma_1:\begin{cases}x=x\\ y=1/2\end{cases},\ -1/2\le x\le 1/2 \Rightarrow \begin{cases}dx=dx\\ dy=0\end{cases}$

$\Gamma_2:\begin{cases}x=x\\ y=x\end{cases},\ 1/2\le x\le 0,\ \Rightarrow \begin{cases}dx=dx\\ dy=dx\end{cases}$ $\quad\Gamma_3:\begin{cases}x=+x\\ y=-x\end{cases},\ 0\le x\le -1/2 \Rightarrow \begin{cases}dx=dx\\ dy=-dx\end{cases}$

Dunque:

$$I=\int_\Gamma X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy=\int_{\Gamma_1}X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy+\int_{\Gamma_2}X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy+$$

$$+\int_{\Gamma_3}X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy=\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1+x}{1-y}\,dx+\int_{1/2}^{0}\left(\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x}{1-x}\right)dx+\int_0^{-1/2}\underbrace{\left(\frac{1+x}{1+x}-\frac{1-x}{1-x}\right)}_{0}dx$$

$$=\int_{-1/2}^{1/2}2(1+x)\,dx+\int_{1/2}^{0}2\,\frac{1+x}{1-x}\,dx=?$$