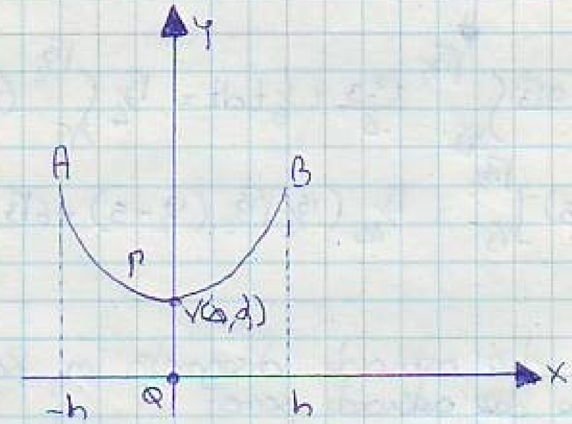
8) Trovare le coordinate del baricentro di un filo Γ (flessibile, inestensibile, omogeneo) sospeso agli estremi A e B e soggetto all'azione del proprio peso.

Un filo sottoposto alla forza peso si comporta nella seguente maniera:



Le equazioni di tale linea sono:

$$y = d\, Ch\, {x}/{d}$$ (riguardare la funzione $Ch\,x$ e il suo grafico nella sezione ripassa dei concetti fondamentali di matematica).

$$-h \leq x \leq h \quad , \quad d = cost > 0.$$

Siano x_G, y_G, z_G le coordinate del baricentro si constata subito che $z_G = 0$ e che $x_G = 0$, in quanto la linea è simmetrica rispetto all'asse y. Quindi:

$$y_G = \frac{1}{\ell} \int_\Gamma y\, ds$$

Dunque:

$$\ell = \int_\Gamma ds = \int_{-h}^{h} \sqrt{1 + Sh^2 \, x/d}\; dx = 2 \int_0^h Ch\, x/d \; dx$$

Infatti:

$$Ch^2 x = 1 + Sh^2 x \Rightarrow \sqrt{1+Sh^2 x} = Ch\, x$$

Analogamente si ha:

$$\sqrt{1 + Sh^2 \, x/d} = Ch\, x/d$$

Poi:

$$2d \left[Sh\, x/d \right]_0^h = 2d\, Sh\, h/d$$

$$\int_\gamma y\,ds = \int_{-h}^{h} a\,Ch\tfrac{x}{a}\sqrt{1+Sh^2\tfrac{x}{a}}\,dx = 2a\int_0^h Ch^2\tfrac{x}{a}\,dx = 2a\int_0^h \frac{1+Ch\,2\frac{x}{a}}{2}\,dx$$

$$= a\left[x+\tfrac{a}{2}Sh\,2\tfrac{x}{a}\right]_0^h = a\left(h+\tfrac{a}{2}Sh\,2\tfrac{h}{a}\right);$$

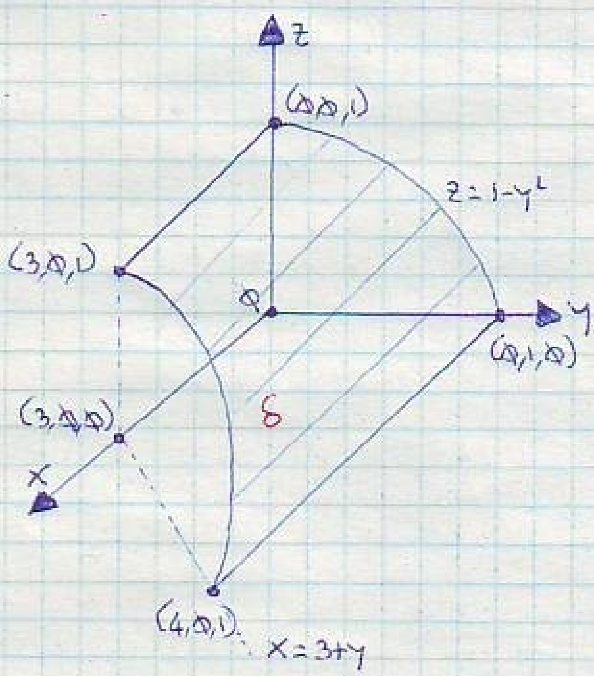
Si noti che:

$$Ch^2 x = \frac{1+Ch2x}{2} \Rightarrow Ch^2\tfrac{x}{a} = \frac{1+Ch\,2\frac{x}{a}}{2}$$

Dunque:

$$y_0 = \frac{h+\frac{a}{2}Sh\,2\frac{h}{a}}{2Sh\frac{h}{a}} = \frac{h}{2Sh\frac{h}{a}} + \frac{a}{2}Ch\frac{h}{a}$$

9) Sia γ l'arco di parabola del piano $x=0$, di equazione $z=1-y^2$ con $0\le y\le 1$, ed S la superficie cilindrica avente γ come direttrice a generatrici parallele all'asse x. Determinare l'area del trapezoide cilindrico $\delta\subset S$ disegnato in figura, delimitato dai piani $x=0$, $y=0$, $z=0$ ed $x=3+y$.



$0\le x\le 3+y$, $0\le y\le 1$, $z=1-y^2$

$$A(\delta)=\int_\gamma (3+y)\,ds = \int_0^1 (3+y)\sqrt{1+z'^2(y)}\,dy$$

Infatti si ricordi che $A(\delta)=\int_\gamma u(P(s))\,ds$, dove $u(P(s))$ è funzione dell'ascissa curvilinea.

Dunque:

$$\int_0^1 (3+y)\sqrt{1+z'^2(y)}\,dy = \int_0^1 (3+y)\sqrt{1+4y^2}\,dy$$

Visto che:

$$\int \sqrt{1+4y^2}\,dy = \tfrac{1}{2}\int ch^2t\,dt = \tfrac{1}{4}\int (1+ch2t)\,dt = \tfrac{1}{4}t + \tfrac{1}{8}\,sh2t = \tfrac{1}{4}(t+$$

$$+ sht\,cht) = \tfrac{1}{4}\log(2y+\sqrt{1+4y^2}) + \tfrac{1}{2}y\sqrt{1+4y^2}.$$

Poi:

$$\int y\sqrt{1+4y^2}\,dy = \tfrac{1}{8}\int (1+4y^2)^{1/2}\,d(4y^2) = \tfrac{1}{12}(1+4y^2)^{3/2}$$

$$\Downarrow$$

$$A(\sigma) = 3\left[\tfrac{1}{4}\log(2y+\sqrt{1+4y^2}) + \tfrac{1}{2}y\sqrt{1+4y^2}\right]_0^1 + \tfrac{1}{12}\left[(1+4y^2)^{3/2}\right]_0^1 =$$

$$= \tfrac{3}{4}\log(2+\sqrt{5}) + 3\frac{\sqrt{5}}{2} + \tfrac{1}{12}\sqrt{5^3} - \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{12}\left(9\log(2+\sqrt{5}) + 23\sqrt{5} - 1\right).$$

* FORME DIFFERENZIALI ESATTE.

Prendiamo in considerazione una linea Γ regolare. Siano poi:

$$X(x,y) \quad , \quad Y(x,y)$$

due funzioni definite su tutti i punti appartenenti a Γ e ivi continue. La seguente espressione:

$$\boxed{X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy}$$

è una forma differenziale lineare in dx e dy. Una generica forma si dice lineare quando è omogenea e di primo grado rispetto alle variabili in questione. Infatti la precedente espressione è omogenea e di primo grado rispetto a dx e dy. Siccome:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = x'(t)\,dt \\ dy = y'(t)\,dt \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_\Gamma X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = \int_\Gamma \left[X(x(t),y(t))\,x'(t) + Y(x(t),y(t))\,y'(t) \right] dt$$

Quest'ultimo integrale è l'integrale esteso a Γ della precedente forma differenziale. Questo integrale gode delle seguenti proprietà:

1) L'integrale non dipende dalla rappresentazione parametrica. Posto infatti:

$$t = t(\gamma)$$

si ha:

$$\begin{cases} x = x(t(\gamma)) \\ y = y(t(\gamma)) \end{cases}$$

dove γ è il nuovo parametro, con $\gamma \in T'(\alpha, \beta)$. Si avrà dunque che:

$$\begin{cases} t(\alpha) = a \\ t(\beta) = b \end{cases}$$

Sostituendo questo nuovo parametro nel precedente integrale si ottiene:

$$\int_\Gamma \left[X(x(t(y)), y(t(y)))\, x'(t(y))\cdot t'(y) + Y(x(t(y)), y(t(y)))\, y'(t(y))\cdot t'(y)\right] dy$$

dove:

$$\begin{cases} dx = x'(t(y))\cdot t'(y)\, dy \\ dy = y'(t(y))\cdot t'(y)\, dy \end{cases}$$

Sapendo che: $\bar{x}(y) = x(t(y))$, $\bar{y}(y) = y(t(y))$ • [si veda la parte riguardante gli integrali doppi in coordinate curvilinee].

$$\Downarrow$$

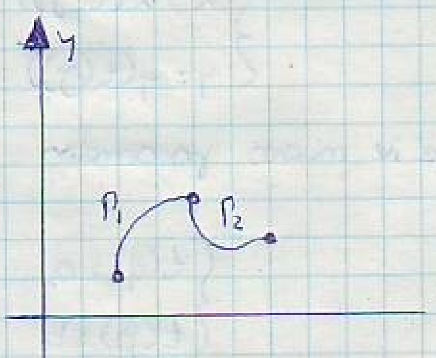
$$\boxed{\int_\Gamma \left[X(\bar{x}(y), \bar{y}(y))\, \bar{x}'(y) + Y(\bar{x}(y), \bar{y}(y))\, \bar{y}'(y)\right] dy}$$

2) L'integrale in questione varia al variare del proprio segno. Più precisamente il segno dell'integrale di una forma differenziale varia al variare dell'orientamento della linea Γ.

$$\boxed{\int_{-\Gamma} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = -\int_\Gamma X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy}$$

3) Se la linea Γ è generalmente regolare si ha:

$\underline{\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2}$



Quindi:

$$\boxed{\int_\Gamma X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = \int_{\Gamma_1} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy + \int_{\Gamma_2} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy}$$

vale cioè la proprietà di additività.

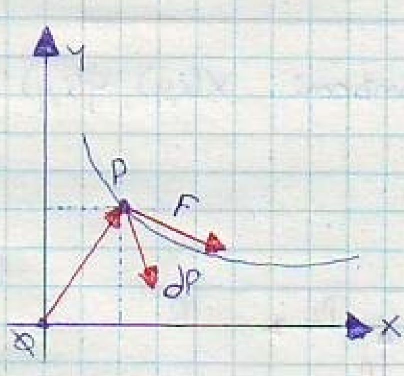
Possiamo inoltre dare a questo integrale una rappresentazione vettoriale; sia:

$$\boxed{P(t) = O + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}}$$

l'equazione vettoriale di Γ, e sia:

$$\boxed{\vec{F} = iX + jY}$$

un generico vettore di componenti X e Y.



Si prenda poi un vettore infinitesimale dP, tale che:

$$\boxed{\vec{dP} = (\vec{i}x'(t) + \vec{j}y'(t))\,dt = \vec{i}dx + \vec{j}dy}$$

siccome:

$$\begin{cases} dx = x'(t)dt \\ dy = y'(t)dt \end{cases}$$

Quest'ultimo vettore risulta tangente a Γ in P. Inoltre il prodotto vettoriale tra i due vettori $\vec{F}$ e $\vec{dP}$ fornisce proprio la forma differenziale lineare.

$$\boxed{\vec{F} \times \vec{dP} = X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy}$$

Eguagliando poi gli integrali si ottiene:

$$\boxed{\int_\Gamma X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = \int_\Gamma \vec{F} \times \vec{dP}}$$

L'integrale:

$$\boxed{\int_{\Gamma} \vec{F} \times d\vec{P}}$$

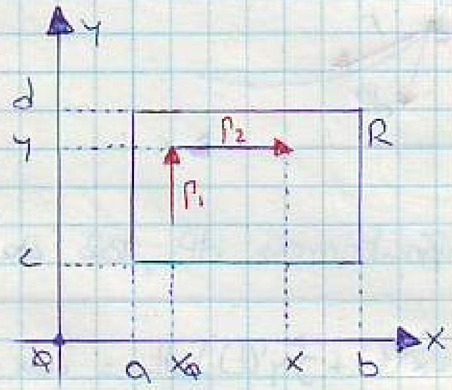
non è altro che la definizione di lavoro. Una forma differenziale lineare si dice esatta (integrabile) se esiste una funzione che la ammetta come suo differenziale totale; più precisamente prendiamo in esame la seguente forma differenziale lineare:

$$X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$$

questa forma è esatta se esiste una funzione $f(x,y)$ tale che:

$$\boxed{df = X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy}$$

Supponiamo ora che le due funzioni $X(x,y)$, $Y(x,y)$ siano continue in un dominio rettangolare R.



$$R = \{ a \le x \le b ,\ c \le y \le d \}$$

Siano poi continue anche le derivate parziali $X_y(x,y)$ e $Y_x(x,y)$. Vediamo che esiste una condizione necessaria e sufficiente che ci dice se una forma differenziale lineare è esatta. Tale condizione afferma che affinché una forma differenziale lineare risulti esatta è necessario e sufficiente che, $\forall (x,y) \in R$ si ha:

$$\boxed{X_y(x,y) = Y_x(x,y)}$$

Vediamo ora di dimostrare questa condizione. Iniziamo a dimostrare la condizione necessaria. Supponiamo che la forma differenziale

$$X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$$

sia esatta. Esisterà allora in R una funzione $f(x,y)$ tale che:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy}$$