

1a) Integrare il sistema differenziale:

$$\begin{cases} xy' = 2y - z + 3x^2 \\ xz' = 3y - 2z \end{cases}$$

Utilizziamo il metodo dell'eliminazione di un'incognita. Eliminiamo z . Secondo questo metodo si ha:

① Derivare la y' rispetto a x :

$$\begin{cases} y' = p(x, y, z) \\ z = q(x, y, z) \end{cases} \Rightarrow y'' = \dots$$

$$xy'' + y' = 2y' - z' + 6x \Rightarrow xy'' - y' = 6x - z'$$

② Dalla 1^a eq. si ricava $z = p(x, y, y')$



$$z = -xy' + 2y + 3x^2$$



$$\begin{aligned} \text{Sostituzione: } xz' &= 3y - 2(-xy' + 2y + 3x^2) \\ &= 3y + 2xy' - 4y - 6x^2 = \\ &= -y - 6x^2 + 2xy' \end{aligned}$$

③ Si elimina z' . $\Rightarrow z' = \frac{-y - 6x^2 + 2xy'}{x}$



$$xy'' - y' = 6x - \left(\frac{-y - 6x^2 + 2xy'}{x} \right)$$



$$xy'' - y' = 6x^2 + y + 6x^2 - 2xy' \quad | \cdot x$$



$$x^2y'' - xy' = 12x^2 + y - 2xy'$$

Si ottiene: $12x^2 = x^2y'' + xy' - y$
Si è così eliminata la z .

Si riconosce $x^2y'' + xy' - y = 12x^2$ è un'eq. di Eulero si procede come di solito per trovare l'integrale generale.

1) a) Integrare il seguente sistema:

$$\begin{cases} xy' = y - (\lambda^2 + 1)z \\ xz' = y - z \end{cases} \quad \lambda > 0$$

b) Dire in base alla teoria, a quali condizioni devono soddisfare i segni di a e b , affinché il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y(\bar{x}) = \bar{y} \\ z(\bar{x}) = \bar{z} \end{cases} \quad a \leq \bar{x} \leq b$$

abbia una e una sola soluzione, prolungabile in tutto $a \rightarrow b$.

c) Determinare autovetori e autovalori del seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} y(1) - z(1) = 0 \\ y(2\pi) - z(2\pi) = 0 \end{cases}$$

a) $y = z'x + z$

$$y' = z''x + z' + z' \Rightarrow y' - z' = z''x + z'$$

$$y = xy' + (\lambda^2 + 1)z$$

$$xy' + (1 + \lambda^2)z = z'x + z \Rightarrow xy' = xz' - \lambda^2 z$$

Dunque: $x^2 z'' + 2xz' = xy'$

$$x^2 z'' + 2xz' = xz' - \lambda^2 z \Rightarrow x^2 z'' + xz' + \lambda^2 z = 0$$

Quest'ultima è un'eq. di Eulero:

$$t(t-1) + t + \lambda^2 = 0 \Rightarrow t^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow t = \pm i\lambda$$

Dunque l'integrale è:

$$z = C_1 \sin \lambda \log x + C_2 \cos \lambda \log x$$

Derivando si ottiene:

$$z' = \lambda \frac{C_1}{x} \cos \lambda \log x - \frac{C_2 \lambda}{x} \sin \lambda \log x$$

$$y = \lambda C_1 \cos \lambda \log x - \lambda C_2 \sin \lambda \log x + C_1 \sin \lambda \log x + C_2 \cos \lambda \log x$$

Integrale generale:

$$\begin{cases} y = (C_1 - \lambda C_2) \sin \lambda \log x + (C_2 + \lambda C_1) \cos \lambda \log x \\ z = C_1 \sin \lambda \log x + C_2 \cos \lambda \log x \end{cases}$$

b) Il sistema equivalente è:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} y - \frac{\lambda^2 + 1}{x} z \\ z' = \frac{1}{x} y - \frac{1}{x} z \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare con $x \neq 0$. 3 sol. $y(x)$ e $z(x)$ prolungabili in tutto $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, e $\mathbb{R}^- \setminus \{0\}$.

$$c) \begin{cases} C_1 = 0 \\ \lambda C_1 \cos \lambda \pi - \lambda C_2 \sin \lambda \pi = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda \cos \lambda \pi & -\lambda \sin \lambda \pi \end{vmatrix} = -\lambda \sin \lambda \pi = 0 \quad \text{per } \lambda = m$$

Le autofrequenze sono quindi $\lambda = 1, 2, \dots, m$.

Autosoluzioni:

$$\begin{cases} y = C_2 \{ \cos m \log x - m \sin m \log x \} \\ z = C_2 \cos m \log x \end{cases}$$

14) Si è visto che per calcolare un integrale particolare di un'eq. completa si usa la formula:

$$u(x) = Z(x) \int_x^{\infty} Z^{-1}(t) p(t) dt$$

Vediamo di capire come si calcola $p(t)$.

* SERIE:

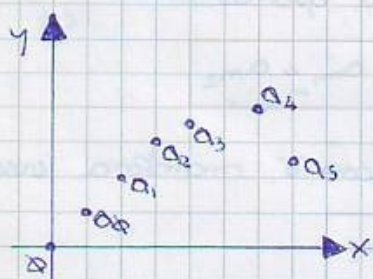
Iniziamo lo studio delle serie definendo cosa è una successione. Una successione è una funzione a un solo valore che ha come insieme di definizione l'insieme dei numeri interi. Genericamente una successione viene così scritta:

$$\{a_m\}$$

dove m è un indice che è un numero intero ($m=0, 1, 2, 3, \dots$). Prendiamo in esame la seguente successione:

$$\sum_{k=0}^m a_k$$

Se si desidera rappresentare graficamente l'andamento di tale successione si ottiene una funzione discreta, cioè una funzione a valori discreti.



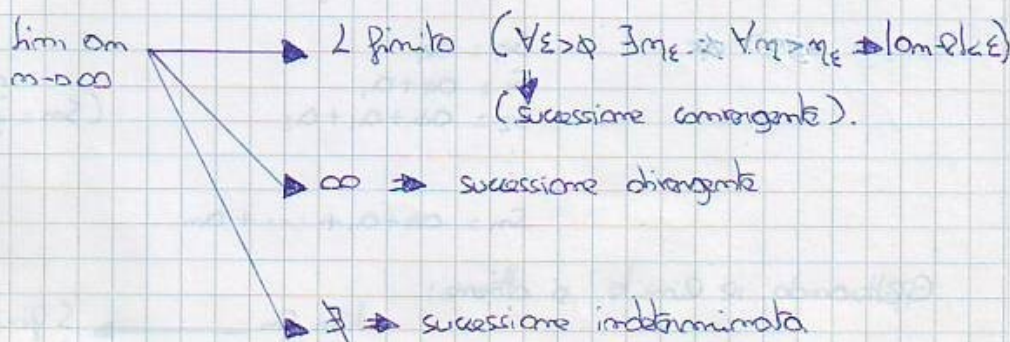
Di solito quando effettua la seguente operazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

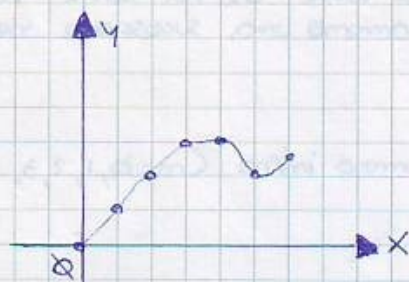
x_0 è il punto di accumulazione. Tale operazione non ha senso per quanto riguarda una successione in quanto essa non è continua in ogni punto del piano. Più precisamente essa è definita solo per alcuni valori. Per la successione l'unico punto di accumulazione è l'infinito. Dunque la seguente operazione è lecita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Di fronte ad un'operazione di questo tipo si possono ottenere tre differenti possibilità:



A volte può risultare complicato collegare il limite di una successione. Può essere convenientemente passare alla relativa funzione ($a_n \rightarrow f(x)$), usando i vari punti discreti della successione stessa.



In questo modo se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$, anche $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ e dunque la successione converge. Si ricordi però che non è vero il viceversa.

Una successione si dice **monotona** quando:

$$n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} < a_{n_2}$$

In questo preciso caso la successione è **monotona crescente**. Se:

$$a_{n_1} \geq a_{n_2}$$

la successione è **non decrescente**. Se la successione è **monotona crescente**, essa può solo convergere oppure divergere. Prima ho scritto la successione nel seguente modo:

$$\sum_{k=0}^n a_k$$

Se però scrivo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

è implicita l'idea che n ha da 0 a ∞ e non ha da 0 a un numero finito. Dunque ho ottenuto una **serie**. Vediamo di capire come riuscì a giungere ad una serie da una successione.

$$\{a_n\} \rightarrow \{S_n\}$$

Sia S_n la **successione delle somme parziali**. Si ha:

$$S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 + a_1$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

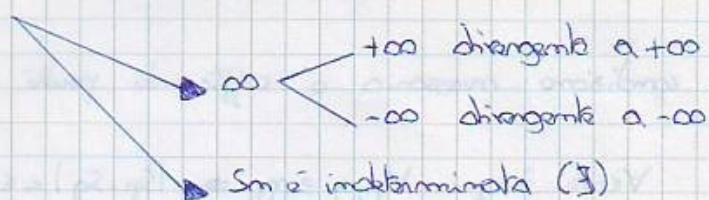
$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$(S_n = \sum_{k=0}^n a_k)$$

Effettuando i limiti si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

→ S finito → Serie di a_n converge ed ha per somma $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.



Si ricorda che S è la somma della serie convergente.
Vediamo ora alcuni tipi di serie:

1) Serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

dove q è una costante e viene detta ragione della serie geometrica.
Per $q \neq 1$ si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$$

Esempio:

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n \Rightarrow qS_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$$

$$\text{Possiamo osservare che } qS_n - S_n = q^{n+1} - 1 \Rightarrow S_n(q-1) = q^{n+1} - 1$$

$$\downarrow$$

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Dunque: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$. Otteniamo i seguenti casi:

- Se $|q| < 1 \Rightarrow$ la serie è convergente.
- Se $|q| = 1 \Rightarrow$ la serie è divergente. ($+\infty$)
- Se $q = -1 \Rightarrow$ Serie oscillante
- Se $q > 1 \Rightarrow$ Serie divergente a $+\infty$.
- Se $q < -1 \Rightarrow$ Serie divergente a ∞ .

Ad esempio:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}^n \quad \text{con } q = \frac{1}{2} \quad (0 < \frac{1}{2} < 1)$$

$\downarrow$
Serie convergente.

Si noti che se si ha la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}^n$$

anch'essa converge. Dunque sopprimendo n termini la costante della serie non cambia.

2) Serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Esiste una condizione necessaria e sufficiente perché una successione sia convergente.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon : \forall p, q \geq m_\varepsilon \Rightarrow |s_p - s_q| < \varepsilon$$

Per quanto riguarda la serie si ha una regola differente:

$$\begin{aligned} p &= m-1 \\ q &= m+k \Rightarrow |s_p - s_q| = |a_m + a_{m+1} + \dots + a_{m+k}| = \\ &= |a_m + a_{m+1} + \dots + a_{m+k}| \end{aligned}$$

$$\forall m > m_\varepsilon \text{ e } \forall k \geq 0 \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}| < \varepsilon$$

Questo criterio è compreso da ulteriori negli esercizi. In corrispondenza di $k=0$ si ha:

$$|a_m| < \varepsilon \Rightarrow \text{Se una serie è convergente allora necessariamente vale il criterio di Cauchy.}$$

Dunque:

$$\text{Se } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ è conv.} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon : \forall m > m_\varepsilon \text{ e } \forall k \Rightarrow |a_m + \dots + a_{m+k}| < \varepsilon$$

$$\text{Per } k=0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon : \forall m > m_\varepsilon \Rightarrow |a_m| < \varepsilon$$

Dunque:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Questa è solo una condizione necessaria, ma non sufficiente. Questa condizione è necessaria perché la serie converga. Se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

allora la serie è non convergente. Tali condizioni non sono sufficienti. Infatti presa la seguente serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Apparentemente la serie è convergente. Però come si dimostra, tra poco la serie è divergente a $+\infty$. Innanzitutto la serie è a termini positivi. Una serie è a termini positivi quando:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \text{ se } \forall n, a_n \geq 0$$

Una serie di questo tipo può solo convergere oppure divergere. Ora ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la serie armonica sia convergente. Allora:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon : \forall m > m_\varepsilon, \forall k \geq 0 \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \dots + a_{m+k}| < \varepsilon$$

$$\text{Prendiamo } k=m \Rightarrow |a_m + \dots + a_{2m}| \Rightarrow |a_m + \dots + a_{2m}| < \varepsilon.$$

Proiamo ad applicare la maggiorazione:

$$\left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} \right| > \varepsilon \Rightarrow m+1 > m \Rightarrow \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{2m}$$

Siccome:

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{2m} \Rightarrow \left| \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{2m} \right| \geq \underbrace{\left| \frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{2m} \right|}_{n/2m = 1/2} \Rightarrow \left| \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{2m} \right| > \frac{1}{2}$$

Come si può facilmente notare qui il criterio di Cauchy non funziona. Dunque la serie armonica non può convergere. Può solo divergere a $+\infty$. Frequentemente può accadere di trovarsi di fronte una serie a **termini complessi**. Ad esempio supponiamo di avere la seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (d_k + i\beta_k) \rightarrow S_m = \sum_{k=0}^m (d_k + i\beta_k) = \sum_{k=0}^m d_k + i \sum_{k=0}^m \beta_k$$

Dunque siamo:

$$\begin{aligned} A_m &= \sum_{k=0}^m d_k \\ B_m &= \sum_{k=0}^m \beta_k \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \rightarrow A_m + iB_m = S_m$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m + iB_m = A + iB \quad \text{convergente}$$

Se quest'ultimo limite non esiste, allora la serie diverge. Se: d_k e β_k conv.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |S_m| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{A_m^2 + B_m^2} = +\infty$$

altrimenti la serie diverge. Supponiamo ora di avere una serie di questo tipo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k \quad \text{con } \lambda = \text{costante} \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$$

Se la serie converge allora $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S = \lim_{m \rightarrow \infty} \{a_0 + \dots + a_m\}$. Chiamiamo S_m la somma parziale m -esima:

$$S_m = \lambda a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda a_m = \lambda S_m$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda S_m = \lambda \lim_{m \rightarrow \infty} S_m$$

Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k$ converge. Dunque possiamo raccogliere sempre un fattore costante. Si ricorda sempre che la convergenza di una serie non dipende da un numero finito di addendi. Supponiamo ora di avere la seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^p a_k + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k = S_p + R_p$$

R_p è il resto più esimo della serie data. $R_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o' ottenuto dalla serie di partenza sopprimendo i primi p termini.
Se la serie di partenza converge, allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_p = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon : \forall n > m_\varepsilon \Rightarrow |R_p| < \varepsilon$$

↓

$$R_p = S - S_p \Rightarrow |S - S_p| < \varepsilon$$

↓

$$S - \varepsilon < S_p < S + \varepsilon$$

Dunque:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_p + R_p \Rightarrow |S - S_p| < \varepsilon$$

Dunque se una serie è convergente, R_p è un infinitesimo. Vediamo adesso di analizzare uno tra i tanti criteri di convergenza utilizzati per le serie a termini positivi. Il criterio che analizziamo è il criterio del confronto:

• criterio del confronto: supponiamo di avere:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n \geq 0 \text{ e } a_n \leq b_n, \quad \forall n$$

a_n viene detta minore della serie b_n . In questo caso b_n viene detta serie maggiorante.

Se la serie maggiorante converge, anche la serie minore converge. Non vale però il viceversa. Questa è solo una condizione sufficiente. Se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty, \text{ cioè la serie diverge, allora anche la serie maggiorante } b_n \text{ diverge.}$$

Vediamo ora qualche esempio:

1) Determinare la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Immediatamente la serie è geometrica con ragione $q = \frac{3}{5}$. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^n\right)$. Inoltre:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(1 + \frac{3}{5} + \dots + \dots\right) \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \Rightarrow q < 1 \Rightarrow \text{serie convergente.}$$

↓

$$S = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{2} = \frac{9}{10}$$

Si ricordi che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q} \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{3}{5}} \cdot \frac{9}{25} = \frac{9}{10}$$