

2) Integrare l'equazione differenziale:

$$y'' + 3\lambda y' + 2\lambda^2 y = 0$$

e determinare autovalli e autovalori del problema ai limiti:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

L'equazione è a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è:

$$t^2 + 3\lambda t + 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9\lambda^2 - 8\lambda^2 \Rightarrow t = \frac{-3\lambda \pm \sqrt{9\lambda^2 - 8\lambda^2}}{2} = \frac{-3\lambda \pm \lambda}{2} \quad (\lambda \neq 0)$$

Se $\lambda = 0 \Rightarrow t^2 = 0 \Rightarrow$ due radici reali e coincidenti

- $y(x) = C_1 + C_2 x$ per $\lambda = 0$

- $y(x) = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{-2\lambda x}$ per $\lambda \neq 0$

$\lambda = 0$ non è autovale. Imposti:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 \pi = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 0 = C_1$$

Per $\lambda \neq 0$ si ha:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{-\lambda \pi} + C_2 e^{-2\lambda \pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\lambda \pi} & e^{-2\lambda \pi} \end{vmatrix} = e^{-\lambda \pi} (e^{-\lambda \pi} - 1) = 0$$

$\hookrightarrow$ Determinante dei coefficienti.

L'eq. è soddisfatta per $e^{-\lambda \pi} = 1$. Essendo $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \pi = -\log 1 = 2m\pi i$

Autovalli:

$$\lambda_m = 2mi$$

Autovalori:

$$y_m(x) = C_1 (e^{-2mix} - e^{-4mix})$$

3) Sia data l'equazione:

$$y'' - 2y' + (1 + \lambda^2)y = \lambda^2 e^x + (1 + \lambda^2)e^{2x} \quad (\lambda \text{ reale}) \quad (1)$$

Sapendo che $u(x) = e^x$ è integrale dell'equazione:

$$u'' - 2u' + (1 + \lambda^2)u = \lambda^2 e^x \quad (2)$$

e $v(x) = e^{2x}$ è integrale dell'equazione:

$$v'' - 2v' + (1 + \lambda^2)v = (1 + \lambda^2)e^{2x} \quad (3)$$

Scrivere l'integrale generale della 1° eq. Determinare poi, per l'equazione omogenea associata, gli autovalori e le autofunzioni del problema ai limiti. $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) - y'(1) = 0 \end{cases}$

L'equazione (1) è a coefficienti costanti complessa. Per il principio di sovrapposizione si ha che:

$$y = u + v = e^x + e^{2x}. \rightarrow \text{Int. particolare della (1)}$$

Consideriamo ora l'omogenea associata alla (1). L'equazione caratteristica è:

$$t^2 - 2t + 1 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \pm i\lambda, \text{ distinte per } \lambda \neq 0.$$

L'integrale generale della (1) è:

$$y(x) = e^x (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) + e^x + e^{2x}. \quad (\lambda \neq 0)$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^x. \quad (\lambda = 0)$$

$$\text{Se } \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 e + C_2 e - C_1 e - C_2 e - C_2 e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad \lambda = 0 \text{ non è autovalore.}$$

$$\text{Se } \lambda \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ e(C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda) - e(C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda - \lambda C_1 \sin \lambda + \lambda C_2 \cos \lambda) = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \cos \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \lambda_m = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \text{Autovalore}$$

Autofunzioni:

$$y_m(x) = C_2 e^x \sin \lambda_m x.$$

4) Integrare l'equazione:

$$y''' + y' = \cos x$$

L'eq. è a coefficienti costanti complessa. L'omogenea associata è:

$$z''' + z' = 0$$

$$t^3 + t = 0 \Rightarrow t(t^2 + 1) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ e } t = \pm i$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è:

$$y(x) = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x + \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ è un'integrale particolare.

$$\varphi(x) = A \sin x + B \cos x$$

$$\varphi'(x) = A \cos x + B \sin x$$

$$\varphi''(x) = -A \sin x + B \cos x$$

$$\varphi''' = -A \cos x - B \sin x$$

$$\Downarrow$$

$$2A \cos x + 2B \sin x = \cos x$$

$$A = \frac{1}{2}, B = 0 \Rightarrow \text{Imh. gen: } y = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x + \frac{1}{2} \sinh x$$

g) Sia:

$$z'' - 2z' + (1 + \lambda^2)z = 0 \quad (1)$$

a) Integrando

b) Determinare gli autovalori λ e le autofunzioni $z_n(x)$ del problema ai limiti:

$$z(0) = z(\pi) = 0$$

c) Integrare $\forall \lambda$ e eq. non omogenea:

$$y'' - 2y' + (1 + \lambda^2)y = e^x d, \quad (d \neq 0 \text{ reale}). \quad (2)$$

d) Dire per quali valori di d esistono soluzioni della (2) soddisfacenti le condizioni ai limiti:

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0.$$

$$a) \quad t^2 - 2t + (1 + \lambda^2) = 0 \Rightarrow 1 \pm i\lambda$$

$$\text{Per } \lambda > 0 \Rightarrow z = e^x (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x)$$

$$b) \quad z(0) = z(\pi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ z(\pi) = e^\pi C_1 \cos \lambda \pi + e^\pi C_2 \sin \lambda \pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \lambda \pi & \sin \lambda \pi \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sin \lambda \pi = 0$$

$\lambda_m = m = 1, 2, \dots$ autovalori

$$\text{Autofunzioni: } z_m(x) = e^x C_2 \sin mx$$

c) $y(x) = e^x (C_1 \cos mx + C_2 \sin mx) + \varphi(x)$ dove $\varphi(x)$ è un'inh. particolare della eq. omogenea.

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} e^t \cos mt & e^t \sin mt \\ e^x \cos mx & e^x \sin mx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t \cos mt & e^t \sin mt \\ e^t (\cos mt - \sin mt) & e^t (\sin mt + \cos mt) \end{vmatrix}} dt = \int_0^x \frac{e^{t+x} \sin m(x-t)}{m e^{2t}} dt =$$

$$= \frac{d e^x}{m^2} \left[\cos m(x-t) \right]_0^x = \frac{d}{m^2} e^x - \frac{d e^x}{m^2} \cos mx = \frac{d e^x}{m^2}$$

$\hookrightarrow$ Può essere ammesso.

$$d) \quad \begin{cases} y(0) = C_1 + d/m^2 = 1 \\ y(\pi) = e^\pi (-1)^m C_1 + d e^\pi / m^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - d/m^2 \\ (-1)^m C_1 = -d/m^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-d/m^2 \\ (-1)^m & -d/m^2 \end{vmatrix} = -d/m^2 + (-1)^m \frac{d}{m^2} - (-1)^m = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{2d}{m^2} + 1 = 0 \quad \text{se } m \text{ dispari}$$

$$d = \frac{m^2}{2}$$

Quindi: $C_1 = \frac{1}{2}$, C_2 qualsiasi.

$$y(x) = e^x \left(\frac{1}{2} \cos mx + C_2 \sin mx \right) + \frac{1}{2} e^x \quad (m \text{ dispari}).$$

6) Integrare per $x > 0$, l'equazione:

$$x^2 y'' + (3-\lambda)xy' - 2\lambda y = 0 \quad (\lambda > 0)$$

e risolvere il problema ai limiti:

$$\begin{cases} y(1) - y'(1) = 0 \\ \lambda y(2) - 2y'(2) = 0 \end{cases}$$

ammettere un unico autovettore e determinare le corrispondenti autovalori.

L'equazione è di Eulero. Equazione caratteristica:

$$t^2 + (2-\lambda)t - 2\lambda = 0$$

$$\swarrow \searrow$$

$$t = -2 \quad t = \lambda \quad \text{per } \lambda > 0$$

Integrale generale:

$$y(x) = C_1 x^{-2} + C_2 x^\lambda$$

$$\text{Integrale: } y'(x) = -2C_1 x^{-3} + \lambda C_2 x^{\lambda-1} \Rightarrow y(1) = C_1 + C_2, \quad y'(1) = -2C_1 + \lambda C_2, \quad y(2) = \frac{C_1}{4} + 2^\lambda C_2$$

$$, y'(2) = -\frac{C_1}{4} + \lambda 2^{\lambda-1} C_2$$

$$\Downarrow$$

$$3C_1 + (1-\lambda)C_2 = 0, \quad (\lambda+2)C_1 = 0$$

La 2° eq. è soddisfatta solo per $C_1 = 0$, ovvero deve essere:

$$1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = C \neq 0$$

$\lambda = 1$ è l'unico autovettore e le corrispondenti autovalori sono:

$$\| y = C \|$$

7) Integrare per $x > 0$ l'eq. differenziale:

$$x^2 y'' + x(1-2\lambda)y' + 2\lambda^2 y = 0 \quad (\lambda > 0)$$

e determinare autovalori e auto soluzioni del seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ \lambda y(e^\pi) - e^\pi y'(e^\pi) = 0 \end{cases}$$

L'equazione è di Eulero. Posto $y = x^\lambda$, $y' = \lambda x^{\lambda-1}$ e $y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$ si ottiene:

$$x^\lambda (\lambda(\lambda-1) + (1-2\lambda)\lambda + 2\lambda^2) = 0.$$

Più precisamente l'eq. caratteristica è:

$$\lambda(\lambda-1) + (1-2\lambda)\lambda + 2\lambda^2 = 0$$

$$\text{Sol: } \lambda_{1,2} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda^2} = \lambda \pm i\lambda \quad (\lambda > 0)$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = x^\lambda [C_1 \cos(\lambda \log x) + C_2 \sin(\lambda \log x)]$$

$$y' = \lambda x^{\lambda-1} [C_1 \cos(\lambda \log x) + C_2 \sin(\lambda \log x)] + x^\lambda \left[-\frac{\lambda C_1}{x} \sin(\lambda \log x) + \frac{\lambda C_2}{x} \cos(\lambda \log x) \right] = \lambda x^{\lambda-1} [(C_1 + C_2) \cos(\lambda \log x) + (C_2 - C_1) \sin(\lambda \log x)].$$

$$y'(1) = (C_1 + C_2)\lambda$$

$$\lambda y(e^\pi) - e^\pi y'(e^\pi) = \lambda e^{\lambda\pi} [C_1 \cos \lambda\pi + C_2 \sin \lambda\pi] + (-\lambda) e^\pi e^{\pi(\lambda-1)} [(C_1 + C_2) \cos \lambda\pi + (C_2 - C_1) \sin \lambda\pi] = \lambda e^{\lambda\pi} [-C_2 \cos \lambda\pi + C_1 \sin \lambda\pi].$$

Dalle condizioni si ha:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \sin \lambda\pi - C_2 \cos \lambda\pi = 0 \end{cases}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sin \lambda\pi & -\cos \lambda\pi \end{vmatrix} = -\cos \lambda\pi - \sin \lambda\pi$$

$\Delta(\lambda) = 0$ per $\cos \lambda\pi = -1$ cioè: $\lambda\pi = -\frac{\pi}{2} + m\pi$, $\lambda_m = -\frac{1}{4} + m$ (autovalori)

$$C_2 = -C_1 \text{ per } \lambda = \lambda_m$$

$$y_m = C_1 x^{\lambda_m} [\cos(\lambda_m \log x) - \sin(\lambda_m \log x)] \quad (\text{auto soluzioni}).$$

b) Integrare, per $x > 0$, l'equazione differenziale

$$x^2 y'' - x y' + (1 + \lambda^2) y = 0 \quad (\lambda \text{ reale})$$

a) Dire se tra le linee integrali esistono rette

b) Determinare autovalori e autosoluzioni del problema ai limiti:

$$\begin{cases} y(1) - y'(1) = 0 \\ y(e^\pi) = 0 \end{cases}$$

a) eq. caratteristica:

$$d(d-1) - d + (1 + \lambda^2) = 0$$

$$d^2 - 2d + (1 + \lambda^2) = 0 \quad \rightarrow d = 1 \pm i\lambda$$

Dunque:

$$y(x) = x(C_1 \cos(\lambda \log x) + C_2 \sin(\lambda \log x)) \quad \lambda \neq 0$$

$$y(x) = C_1 x + C_2 x \log x \quad \text{per } \lambda = 0$$

Dunque per $\lambda \neq 0$ non ci sono rette tra le linee integrali, mentre per $\lambda = 0$ e $C_2 = 0$ si ha:

$$y = C_1 x \text{ che è una retta.}$$

b) $\lambda \neq 0$:

$$y' = C_1 \cos(\lambda \log x) - \lambda C_1 \sin(\lambda \log x) + C_2 \sin(\lambda \log x) + \lambda C_2 \cos(\lambda \log x).$$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 \cos \lambda \pi + C_2 \sin \lambda \pi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos \lambda \pi & \sin \lambda \pi \end{vmatrix} = -\cos \lambda \pi = 0$$

$$\text{Autovalori: } \lambda = \frac{2m+1}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Autosoluzioni:

$$y = C_1 x \cos\left(\frac{2m+1}{2} \log x\right)$$

$$\text{Per } \lambda = 0 \Rightarrow C_1 x + C_2 x \log x \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + \pi C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0$ non è autovalore.

9) Integrare il sistema:

$$\begin{cases} y' = y + z - 3x \\ z' = y + z + x - 1 \end{cases}$$

e determinare un'unica integrale soddisfacente le condizioni:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ z(1) = 2 \end{cases}$$

Utilizzando il metodo dell'eliminazione dell'incognita si ha:

$$\begin{cases} z = y' - y + 3x \\ z' = y + z + x - 1 \end{cases} \Rightarrow z' = y + y' - y + 3x + x - 1 = y' + 4x - 1$$

Derivando si ottiene:

$$y'' = y' + z' - 3 \Rightarrow y'' - 2y' = 4x - 4$$

Questa ultima è un'equazione lineare a coefficienti costanti. La sua equazione caratteristica è:

$$t^2 - 2t = 0 \Rightarrow \frac{2 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow t = 0 \text{ e } t = 2$$

Dunque si ottiene:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + \varphi(x).$$

Posto $\varphi(x) = Ax^2 + Bx$

$$\varphi'(x) = 2Ax + B$$

$$\varphi''(x) = 2A \Rightarrow 2A - 4Ax - 2B \equiv 4x - 4 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = -x^2 + x$$

Dunque: $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} - x^2 + x$.

$$z(x) = y' - y + 3x = -C_1 + C_2 e^{2x} + x^2 + 1$$

Condizioni:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ z(1) = -C_1 + C_2 e^2 + 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

Soluzione:

$$\begin{cases} y = x - x^2 \\ z = 1 + x^2 \end{cases}$$