

$$\begin{aligned}
 & \int_0^x z'(t) F(t) dt = \int_0^x \begin{bmatrix} -3 \sin t \cos^2 t \\ -2 \sin t \cos t + \cos^3 t \end{bmatrix} dt = \\
 & = \begin{bmatrix} \cos^3 x - 1 \\ \sin x \cos^2 x \end{bmatrix} \Rightarrow u(x) = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^3 x - 1 \\ \sin x \cos^2 x \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} \cos x - 1 \\ \tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -\tan x \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Si vede che il primo vettore è identico ad un integratore particolare perciò non viene preso in considerazione.

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 + C_2 \tan x + \cos x \\ y_2(x) = -C_1 \tan x + C_2 \end{cases}$$

3) $\begin{cases} u'(x) = u + ve^x \\ v'(x) = ue^{-x} - 2xv \end{cases}$, dove se $\begin{cases} u_1(x) \\ v_1(x) \end{cases}$ e $\begin{cases} u_2(x) \\ v_2(x) \end{cases}$ dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} u_1(1) = 3 \\ v_1(1) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u_2(1) = 4 \\ v_2(1) = 1 \end{cases}$$

Prima un sistema fondamentale, e costruire le transizioni nel punto $x=4$.

$$W(1) = \begin{vmatrix} u_1(1) & u_2(1) \\ v_1(1) & v_2(1) \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow \text{sistema fondamentale.}$$

Inoltre: $W(4) = W(1) e^{\int_1^4 (a_{11}(t) + a_{22}(t)) dt} = 3e^{\int_1^4 (1-2t) dt} = 3e^{x-x^2} \Rightarrow W(4) = 3e^{-12} \neq 0$.

La stessa cosa che abbiamo fatto per i sistemi lineari vale per le equazioni lineari. In particolare le teoremi di Jacob per i sistemi lineari si trasforma nel teorema di Liouville per le equazioni lineari. In breve questo teorema afferma che:

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x (a_{11}(t) + a_{22}(t)) dt}$$

Noi studieremo due tipi di equazioni lineari:

- 1) a coefficienti costanti
- 2) di Eulero

Iniziamo dalla prima. Un'equazione lineare a coefficienti costanti è un'equazione del tipo:

$$a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = p(x)$$

Prendiamo in considerazione l'equazione omogenea associata:

$$a_0 z^{(m)} + a_1 z^{(m-1)} + \dots + a_m z = 0$$

Supponiamo di soddisfare tale equazione con:

$$z(x) = e^{\lambda x}$$

con λ costante. Sostituendo quest'ultima nell'equazione si trova:

$$e^{\lambda x} (a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m) = 0$$

Osserviamo che $e^{\lambda x}$ risulta un integrale dell'equazione se e solo se λ è una radice della seguente equazione:

$$a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m = 0$$

Questa viene detta EQUAZIONE CARATTERISTICA DELL'OMogenea ASSOCIATA.

$$Q(\lambda) = \sum_{j=0}^m a_j \lambda^j$$

è il POLINOMIO CARATTERISTICO DELL'OMogenea ASSOCIATA. Se l'equazione caratteristica ha m radici tutte distinte:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

allora l'equazione omogenea associata ha m integrali particolari:

$$z_1 = e^{\lambda_1 x}, z_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, z_m = e^{\lambda_m x}$$

tutti linearmente indipendenti, in quanto il Wronskiano è non nullo.

$$W(x) = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-2} & \dots & \lambda_m^{m-2} \\ \lambda_1^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

Poiché le m radici dell'equazione caratteristica sono tutte distinte, l'integrale generale sarà la seguente combinazione lineare:

$$z(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_m e^{\lambda_m x}$$

dove $C_1, \dots, C_m$ sono costanti arbitrarie. Nel caso in cui le radici dell'equazione caratteristica siano complesse si ha:

$$C_1 \cos \lambda_1 x + C_2 \cos \lambda_2 x$$

Facciamo subito qualche esempio:

1) Dato:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

con i coefficienti $a_0, \dots, a_n$ costanti, si supponga che la rispettiva equazione caratteristica:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

abbia le radici $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{1}{2}, \lambda_6 = -1, \lambda_7 = 2+3i, \lambda_8 = 2-3i$.
Scrivere l'integrale generale.

$$y(x) = C_1 + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2 + C_5 x^3) e^{\frac{1}{2}x} + C_6 e^{-x} + e^{2x} (C_7 \cos 3x + C_8 \sin 3x).$$

2) Integrale generale:

a) $y''' - y'' + y' - y = 0$

b) $y^{(4)} - 4y'' + 4y = 0$

c) $y^{(4)} - 6y''' + 9y'' = 0$

a) eq. caratteristica: $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1) = 0$
 $\Rightarrow C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

b) eq. caratteristica: $\lambda^4 - 4\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}$

c) eq. caratteristica: $\lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 (\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0$

$$C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^{3x} = y(x)$$

Come si può notare dagli esempi non sempre le radici sono distinte. Può succedere infatti che l'equazione caratteristica possieda le radici multiple $\pi(k)$ con l'ordine di molteplicità m . Dunque l'omogenea associata ha i seguenti m integrali:

$$z_1(x) = e^{\pi(x)}, z_2(x) = e^{\pi(x)} x, z_3(x) = x^2 e^{\pi(x)}, z_m = x^{m-1} e^{\pi(x)}.$$

L'altro tipo di equazione lineare è l'equazione di Eulero, scritta nella seguente maniera:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{m+1} x y' + a_m y = 0$$

Finale per le equazioni di Eulero si ha la distinzione tra quelle omogenee e quelle complete. Nel caso di un'equazione di Eulero omogenea, basta imporre

$$\begin{cases} y = x^\lambda \text{ come soluzione} \\ y' = \lambda x^{\lambda-1} \end{cases}$$

sostituendo nell'equazione si ha:

$$y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}, \quad y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}$$

IDENTITÀ $\rightarrow$ eq. caratteristica
Trovate le radici dell'equazione caratteristica si forma l'integrale generale come una combinazione lineare:

$$y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} + C_3 x^{\lambda_3} + \dots$$

Per quanto riguarda le equazioni di Eulero complete basta ricordarsi del termine noto. Si osserva che $x=0$ è un punto singolare per l'equazione di Eulero, e che si può sempre trasformare un'equazione di Eulero in un'equazione a coefficienti costanti tramite la seguente sostituzione:

$$\log x = t \Rightarrow \begin{cases} x = e^t & (x > 0) \\ x = -e^t & (x < 0) \end{cases}$$

Facciamo subito qualche esempio:

i) eq. di Eulero:

$$x^3 y''' - 5x^2 y'' + 12x y' - 12y = 0$$

Integriamo:

$$y = x^\lambda \Rightarrow y' = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}, \quad y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}$$

$$\downarrow$$

$$x^3(\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}) - 5x^2(\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}) + 12x(\lambda x^{\lambda-1}) - 12y = 0$$

$$\text{L'equazione diventa: } x^\lambda = x^\lambda(\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 5\lambda(\lambda-1) + 12\lambda - 12) = 0$$

$$\text{L'equazione caratteristica è: } \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 5\lambda(\lambda-1) + 12\lambda - 12 = 0$$

Analizziamo ora un aspetto importante delle eq. e dei sistemi lineari. Analizziamo i problemi ai limiti. Prendiamo in esame un'equazione del tipo:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = p(x)$$

dove $p(x), p(x), q(x)$ sono continue in aib. Cerchiamo un integrale $y(x)$ che soddisfi queste due condizioni:

$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = K_1 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = K_2 \end{cases}$$

Il problema è lineare perché è lineare perché e l'incognita e le sue derivate sono espresse da equazioni differenziali lineari. Si consideri poi il problema omogeneo associato:

$$z'' + p(x)z' + q(x)z = r$$

che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} a_1 z(a) + a_2 z'(a) = r \\ b_1 z(b) + b_2 z'(b) = r \end{cases}$$

Il problema omogeneo ammette ovviamente la soluzione $z(x) \equiv 0$. Se ne ammette altre oltre $\neq 0$, allora queste vengono dette autoselezioni del problema. Proprietà:

- 1) Se $z(x)$ è autoselezione, anche $cz(x)$ lo è, con c costante arbitraria.
- 2) Se $z_1(x)$ e $z_2(x)$ sono autoselezioni linearmente indipendenti, allora ogni loro combinazione lineare a coefficienti non entrambi nulli è ancora autoselezione.

$$z(x) = c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x)$$

Ora siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due integrali linearmente indipendenti dell'eq. omogenea. Allora gli integrali generali dell'eq. completa e dell'eq. omogenea sono:

$$\begin{cases} z(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \\ y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + w(x) \end{cases}$$

$w(x)$ è un integrale particolare dell'eq. completa. Questo è così definito:

$$w(x) = \int_a^x \frac{f_1(t)f_2'(x) - f_2(t)f_1'(x)}{f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x)} p(t) dt$$

Si ricordi infatti che:

$$Iq = I^* + I_p$$

dove I^* è l'integrale dell'omogenea. L'integrale particolare $w(x)$ dell'eq. completa è dato da:

$$\begin{aligned} u(x) &= z(x) \int_x^x z^{-1}(t) F(t) dt \\ &\Downarrow \\ y(x) &= z(x) \left(c + \int_x^x z^{-1}(t) F(t) dt \right) \end{aligned}$$

Appiamo $y(x)$ soddisfa l'eq. completa e mensiono che c_1 e c_2 sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} a_1 \{ c_1 f_1(a) + c_2 f_2(a) + w(a) \} + a_2 \{ c_1 f_1'(a) + c_2 f_2'(a) + w'(a) \} \\ b_1 \{ c_1 f_1(b) + c_2 f_2(b) + w(b) \} + b_2 \{ c_1 f_1'(b) + c_2 f_2'(b) + w'(b) \} \end{cases}$$

Posto: $\rightarrow m_{11} = a_1 f_1(a) + a_2 f_1'(a)$, $m_{21} = b_1 f_1(b) + b_2 f_1'(b)$
 $m_{12} = a_1 f_2(a) + a_2 f_2'(a)$, $m_{22} = b_1 f_2(b) + b_2 f_2'(b)$ $\Downarrow$



$$m_{11}c_1 + m_{12}c_2 = k_1$$

$$(w(a) = w(b))$$

$$m_{21}c_1 + m_{22}c_2 = k_2 - b_1 w(b) - b_2 w'(b)$$

Queste costituiscono un sistema lineare di due eq in due incognite c_1, c_2 .
Se il problema è omogeneo si ha che $k_1 = k_2 = 0$ e $p(x) = 0$. Dunque:

$$\begin{cases} m_{11}c_1 + m_{12}c_2 = 0 \\ m_{21}c_1 + m_{22}c_2 = 0 \end{cases}$$

Sia:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$$

Se $\Delta \neq 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ e non esistono autoselezioni del problema omogeneo.

Se $\Delta = 0 \Rightarrow$ esistono infinite autoselezioni.

Supponendo che $q(x)$ sia una soluzione. In tal caso esistono infinite soluzioni date dalla formula:

$$y(x) = q(x) + z(x)$$

dove $z(x)$ è la più generale soluzione del problema omogeneo. Infine si ricordi che condizione necessaria e sufficiente perché il problema omogeneo associato ammetta autoselezioni è che λ sia una radice dell'equazione:

$$\Delta(\lambda) = 0$$

I valori di λ ottenuti sono gli autovalori del problema. Quest'ultima equazione è nota come equazione caratteristica del problema.

Chiamo infine un metodo per risolvere un sistema. Consideriamo il seguente sistema in forma normale:

$$\begin{cases} y' = p(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$

Supponiamo che p, g siano continue in un campo A dello spazio (x, y, z) insieme alle derivate:

$$p_x, p_y, p_z, g_x, g_y, g_z \quad \text{e} \quad p_z \neq 0$$

Se $\{y(x), z(x)\}$ è un integrale del sistema, la funzione $P(x, y(x), z(x))$ è allora detta di derivate continue rispetto a x e:

$$y'(x) = P(x, y(x), z(x))$$



$$y'' = P_x(x, y, z) + P_y(x, y, z)y' + P_z(x, y, z)z' = P_x(x, y, z) + P_y(x, y, z)y' + P_z(x, y, z)g(x, y, z)$$

Siccome $p_z \neq 0$ ↓



$$z = \varphi(x, y, y')$$



$$y'' = p(x, y, \varphi) + p_1(x, y, \varphi)y' + p_2(x, y, \varphi)g(x, y, \varphi) = F(x, y, y')$$

Integrandola si ottiene: $y = y(x, c_1, c_2) \Rightarrow z = \varphi(x, y(x, c_1, c_2), y'(x, c_1, c_2))$
 Questo procedimento è noto come METODO DELLE SUCCESSIVE ELIMINAZIONI DELLE INCOGNITE.

Esercizi:

1) Integrare, $\forall \lambda$ reale, l'equazione differenziale:

$$y'' + 2y' + (1 + 4\lambda^2)y = 0$$

Determinare autovalori e autovalori del problema ai limiti:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) + y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

L'equazione è un'equazione a coefficienti costanti. Dunque:

$$t^2 + 2t + (1 + 4\lambda^2) = 0 \rightarrow \text{eq. caratteristica}$$

Per $\lambda = 0 \rightarrow$ due soluzioni coincidenti (-1). $y(x) = Ce^{-x} + Dxe^{-x}$ ($\lambda = 0$)
 Per $\lambda \neq 0$ si ha:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1 + 4\lambda^2) = 4 - 4 - 16\lambda^2 = -16\lambda^2$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{-16\lambda^2}}{2} = -1 \pm 2i\lambda$$

Dunque: $y(x) = e^{-x}(A \cos 2\lambda x + B \sin 2\lambda x)$

Analizziamo ora il problema:

$$\begin{cases} y'(x) = -Ce^{-x} + D(1-x)e^{-x} \\ y(x) + y'(x) = De^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ De^{-\pi/2} = 0 \end{cases} \Rightarrow C = D = 0 \rightarrow \text{non esistono autovalori e dunque autovalori}$$

Vediamo ora per $\lambda \neq 0$.

$$y'(x) = e^{-x}(-A \cos 2\lambda x - B \sin 2\lambda x - 2\lambda A \sin 2\lambda x + 2\lambda B \cos 2\lambda x)$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ 2e^{-\pi/2}\lambda (B \cos \lambda\pi - A \sin \lambda\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \cos \lambda\pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \lambda\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } B \neq 0 \end{cases}$$

Dunque gli autovalori sono:

$$\lambda_k = \frac{1}{2} + k$$

Autovalori:

$$y_k = Be^{-x} \sin((1+2k)x)$$