Un sistema di questo tipo viene detto SISTEMA COMPLETO. I coefficienti $a_{11}(x), a_{12}(x), \dots$ vengono detti coefficienti noti, mentre $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots,$ vengono detti termini noti. $y_1, y_2, \dots, y_m$ sono le incognite. Un sistema privo dei termini noti viene detto SISTEMA OMOGENEO. Ad esempio:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1m}(x)y_m \\ y_2' = a_{12}(x) + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2m}(x)y_m \\ y_m = a_{1m}(x) + a_{2m}(x)y_2 + \dots + a_{mm}(x)y_m \end{cases}$$

Similmente un'equazione differenziale è lineare quando è scritta nella seguente maniera:

$$\boxed{a_0(x)y^m(x) + a_1(x)y^{m-1}(x) + \dots + a_m(x)y(x) = \varphi(x)}$$

dove $a_0(x), a_1(x), \dots, a_m(x)$ sono funzioni assegnate, continue in un intervallo chiuso e limitato $a \vdash b$. Se in $a \vdash b$ il termine noto è nullo, l'equazione si dice omogenea. Possiamo porre la precedente equazione in forma normale:

$$a_0(x)y^m = -a_1(x)y^{m-1} - \dots - a_m(x)y(x) + \varphi(x)$$

$$\Downarrow$$

$$y^m = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y(x)^{m-1} - \frac{a_2(x)}{a_0(x)}y(x)^{m-2} - \dots - \frac{a_m(x)}{a_0(x)}y(x) + \frac{\varphi(x)}{a_0(x)}$$

Posto $-\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = P_1(x)$ e $\frac{\varphi(x)}{a_0(x)} = \psi(x)$ si ottiene:

$$\boxed{y^m = P_1(x)y^{m-1} P_2(x)y^{m-2} + \dots + \psi(x)}$$

Questo può accadere se e solo se $a_0 \neq 0$. Scrivendo l'equazione lineare in forma scalare si ha:

$$\boxed{y^m(x) = \sum_{1}^{m}{}_k\, p_k(x)y^{m-k}(x) + \varphi_i(x)}$$

Sotto tale ipotesi si ha che esiste uno e un solo integrale $y(x)$ dell'equazione il quale soddisfa le seguenti condizioni iniziali:

$$y(\bar{x}) = \bar{y}, \quad \bar{y}' = y'(\bar{x}), \quad \bar{y}^{m-1} = y^{m-1}(\bar{x})$$

Sotto tali condizioni l'integrale $y(x)$ si può prolungare in tutto l'intervallo $a \vdash b$. Precedentemente si è visto che un sistema di equazioni lineari può essere scritto in forma matriciale:

$$\boxed{y'(x) = A(x)y(x) + F(x)}$$

Se vogliamo risolvere un problema di Cauchy inerente a tale sistema si ha:

$$\begin{cases} y_1(\bar{x}) = \bar{y}_1 \\ y_2(\bar{x}) = \bar{y}_2 \\ \vdots \\ y_m(\bar{x}) = \bar{y}_m \end{cases} \qquad \text{In genere: } \boxed{y(\bar{x}) = \bar{y}}$$

dove $\bar{y}$ è il seguente vettore:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_m \end{bmatrix}$$

I due cardini di tutta la teoria inerente i sistemi e le equazioni lineari sono il teorema di esistenza e unicità e il principio di sovrapposizione. Abbiamo visto che se i coefficienti e i termini noti sono continui in un intervallo chiuso e limitato, gli integrali sono prolungabili in tutto l'intervallo. Vediamo ora di vedere il principio di sovrapposizione; siano $u(x)$ e $v(x)$ soluzioni dell'equazione:

$$u'(x) = A(x)u(x) + f(x)$$
$$v'(x) = A(x)v(x) + g(x)$$

$u(x)$ e $v(x)$ sono caratterizzati dalle condizioni:

$$u(\bar{x}) = \bar{u} \quad e \quad v(\bar{x}) = \bar{v}$$

Il principio afferma che il vettore somma $w(x) = u(x) + v(x)$ soddisfa l'equazione:

$$\boxed{w'(x) = A(x)w(x) + (f(x) + g(x))}$$

dove $w(\bar{x}) = \bar{w} = u(\bar{x}) + v(\bar{x}) = \bar{u} + \bar{v}$. Se ho due sistemi che hanno la stessa matrice dei coefficienti allora il principio di sovrapposizione mi dice che il sistema totale ha la stessa matrice dei coefficienti e come termine noto la somma dei termini noti. Consideriamo ora un sistema lineare omogeneo di ordine m. Sia:

$$z(x) = \begin{bmatrix} \xi_1(x) \\ \vdots \\ \xi_m(x) \end{bmatrix}$$

il vettore incognito. Il sistema ha la seguente forma matriciale:

$$z'(x) = A(x)z(x)$$

In forma scalare il sistema viene così scritto:

$$\xi_j' = \sum_{1}^{m}{}_k \, a_{jk}(x)\xi_k \qquad j = 1, \dots, m.$$

La forma matriciale gode delle seguenti proprietà:

1) Il vettore $z(x) \equiv \varnothing$ è una soluzione

2) Se $z(x)$ è una soluzione, lo è anche $\gamma z(x)$ con γ costante.

3) Se $z_1(x)$ e $z_2(x)$ sono soluzioni, anche $z_1(x) + z_2(x)$ è soluzione.

L'ultima proprietà è una conseguenza del principio di sovrapposizione. Consideriamo ora l'integrale $z_m(x)$:

$$z_m(x) = \begin{bmatrix} \xi_{1m}(x) \\ \vdots \\ \xi_{mm}(x) \end{bmatrix} \qquad (m = 1, \dots, m).$$

si costruisce una matrice detta MATRICE WRONSKIANA così composta:

$$\mathcal{G}(x) = \begin{bmatrix} \xi_{1,1}(x) & \cdots & \xi_{1,m} & \cdots & \xi_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi_{j,1}(x) & \cdots & \xi_{2m} & \cdots & \xi_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi_{m,1}(x) & \cdots & \xi_{mm} & \cdots & \xi_{mm} \end{bmatrix}$$

ed il relativo determinante viene detto DETERMINANTE WRONSKIANO. Vediamo ora di capire meglio quanto detto riprendendo gli ultimi concetti. Prendiamo un sistema lineare completo ed il suo omogeneo associato:

$$\begin{cases} y' = A(x)\,y + F(x) \\ z' = A(x)\,z \end{cases} \qquad y \neq z \quad \text{con } V' = y' + z'$$

$$V' = A(x)\,V + F(x)$$

si ha che l'integrale generale di un sistema o di una equazione lineare è dato dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea più un integrale particolare del sistema o dell'equazione completa. Dunque:

$$\boxed{I = I_g + I_p}$$

L'integrale generale dell'eq. omogenea è, come vedremo, una combinazione lineare degli integrali particolari linearmente indipendenti. Abbiamo preso il seguente sistema omogeneo:

$$z'(x) = A(x)\,z(x)$$

e abbiamo considerato l'integrale $z(x)$, o meglio abbiamo considerato i vari integrali particolari e li abbiamo uniti in un unica matrice detta matrice Wronskiana. Tale matrice soddisfa l'equazione:

$$\boxed{\mathcal{G}'(x) = A(x)\,\mathcal{G}(x)}$$

Esiste un teorema importante che mi dice come varia il Wronskiano in un intervallo a+b. Questo teorema, noto come TEOREMA DI JACOBI afferma che fissato in a+b un punto $\bar{x}$, il valore del Wronskiano $W(x)$ è dato da:

$$\boxed{W(x) = W(\bar{x})\, e^{\int_{\bar{x}}^{x} \left(\sum_{1}^{m} a_{kk}(x)\right) dx}}$$

Da questo teorema segue che il Wronskiano è negativo o positivo in tutto a+b se è negativo o positivo in $\bar{x}$. Vediamo qualche esempio di quanto appena detto:

1) Determinare i coefficienti $a_{jk}(x)$ del seguente sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} y'(x) = a_{11}(x)y + a_{12}(x)z \\ z'(x) = a_{21}(x)y + a_{22}(x)z \end{cases}$$

che ammette in $T = \{0 < x < +\infty\}$ i due seguenti integrali particolari linearmente indipendenti:

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ z_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} y_2(x) \\ z_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x^2 \end{bmatrix}$$

Utilizziamo la "formula" $Z'(x) = A(x)Z(x) \Rightarrow A(x) = Z'(x)Z^{-1}(x)$.
Sia:

$$Z(x) = \begin{bmatrix} x^2 & x \\ x^3 & 2x^2 \end{bmatrix}$$ la matrice wronskiana il cui determinante è: x^4.

$$Z'(x) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 3x^2 & 4x \end{bmatrix} \Rightarrow A(x) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 3x^2 & 4x \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{x^4} \begin{bmatrix} 2x^2 & -x \\ -x^3 & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 3x^2 & 4x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/x^2 & -1/x^3 \\ -1/x & 1/x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3/x & -1/x^2 \\ 2 & 1/x \end{bmatrix}$$

Dunque i coefficienti sono: $a_{11} = 3/x$, $a_{12} = -1/x^2$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1/x$.

Una matrice $Z(x)$ viene detta fondamentale quando in $\bar{x}$, si ha $W(\bar{x}) \neq 0$. Dunque gli n integrali particolari $z_1(x), \dots, z_n(x)$ costituiscono un sistema fondamentale per l'equazione o il sistema. Se $Z(x)$ è una matrice fondamentale, l'integrale generale è dato da:

$$\boxed{z(x) = Z(x)c}$$

dove $c = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$ è un vettore costante. Ad esempio:

1) Supponiamo che un sistema fondamentale di integrali particolari di un sistema lineare omogeneo sia dato in $T = \{0 < x < +\infty\}$ da:

$$z_1(x) = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} \quad e \quad z_2(x) = \begin{bmatrix} x^3 \\ \varphi(x) \end{bmatrix}$$

determinare $\varphi(x)$ in modo che il rispettivo wronskiano $W(x)$ sia 2 in T.

Essendo $Z(x) = \begin{bmatrix} x & x^3 \\ -x & \varphi(x) \end{bmatrix}$ e $W(x) = \det Z(x) = x\varphi(x) + x^4 \Rightarrow \varphi(x) = \frac{2}{x} - x^3$

Sia ora $u(x)$ un integrale particolare. Si può determinare un vettore $\bar{c}$ in modo che:

$$\boxed{Z(x)\,\bar{c} = u(x)}$$

Infatti essendo $W(x) = \det Z(x) \neq 0$ ($Z(x)$ è una matrice fondamentale), esiste la matrice reciproca $Z^{-1}(x)$. Dunque:

$$\boxed{\bar{c} = Z^{-1}(x)\,u(x)}$$

Si ha dunque una corrispondenza biunivoca tra i vettori c e gli integrali particolari $u(x)$. Vediamo di approfondire quanto detto:

$$Z'(x) = A(x)Z(x) \quad \text{con } Z(x) = \begin{bmatrix} \xi_1(x) \\ \vdots \\ \xi_n(x) \end{bmatrix}, \; A(x) \in C^0(p^{\cap}q).$$

L'intervallo $p^{\cap}q$ è un intervallo chiuso e limitato. Se $Z(x)$ è un integrale, ovvero $Z(x) \in C^1(p^{\cap}q)$, e $\xi_m \in C^1(p^{\cap}q)$. Vediamo alcune proprietà di $Z(x)$ e $W(x)$:

1) $\xi_{i,j} \in C^1(p^{\cap}q)$, $Z(x) \in C^1(p^{\cap}q)$, $W(x) \in C^1(p^{\cap}q)$.

2) $Z' = A(x)Z$ soddisfa formalmente il sistema.

Esiste un teorema detto teorema di Jacobi il quale afferma che se $W(\bar{x}) = 0$ dove $\bar{x} \in p^{\cap}q$ allora in tutto l'intervallo $p^{\cap}q$ è $W(x) = 0$. Se $W(\bar{x}) \neq 0$ si ha che $W(x) \neq 0$ e $Z(x)$ è una matrice fondamentale, ed inoltre $\{z_1(x), \ldots, z_m(x)\}$ costituiscono un sistema fondamentale. Se $W(x) \neq 0$ si ha come condizione necessaria e sufficiente che $z_1, \ldots, z_m$ sono linearmente indipendenti e che esiste la matrice reciproca $Z^{-1}(x)$.

Se $Z(x)$ è fondamentale, $Z(x)c$ è l'integrale generale del sistema $Z'(x) = A(x)Z(x)$. Dimostriamo quanto appena detto.

$Z(x)c$ è integrale con $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$, $\forall c$.

$Z(x)c = c_1 z_1 + \cdots + c_m z_m$

$\begin{cases} z = Z(x)c \\ z' = Z'(x)c \end{cases}$ soddisfa il sistema.

Inoltre $Z(x)c$ contiene tutti gli integrali particolari. Sia $u(x)$ un integrale particolare si ha:

$$\boxed{u(x) = Z(x)\,\bar{c}}$$

Si noti infine che se gli m integrali $z_1(x), \dots, z_m(x)$ risultano linearmente dipendenti, il vettore:

$$z(x) = Z(x)c$$

non definisce l'integrale generale del sistema. Vediamo ora di analizzare il caso in cui il sistema non sia omogeneo, cioè sia completo. Si consideri la seguente equazione matriciale non omogenea:

$$\boxed{y'(x) = A(x)y(x) + F(x)} \quad (1)$$

Prendiamo poi l'equazione matriciale dell'omogenea associata:

$$\boxed{z'(x) = A(x)z(x)} \quad (2)$$

L'integrale generale della (1) è dato dalla somma di un integrale particolare della (1) e di un integrale generale della (2). Sia $u(x)$ un integrale particolare della (1) e $Z(x)c$ l'integrale generale dell'omogenea associata si ha:

$$\boxed{I_g = Z(x)c + u(x)}$$

Per calcolare $u(x)$ si utilizza il METODO DELLE COSTANTI ARBITRARIE. Sia:

$$\begin{cases} y' = A(x)y + F(x) \\ z' = A(x)z \end{cases} \qquad \text{con } z = Z(x)c, \quad u(x) = Z(x)g(x)$$

→ sostituito a c.

$g(x)$ sia un vettore incognito. Si ipotizzi che $u(x)$ soddisfi la prima eq. matriciale (completa).

$$u'(x) = A(x)u(x) + F(x) \Rightarrow Z'(x)g(x) + Z(x)g'(x) = A(x)[Z(x)g(x)] + F(x)$$

$$\Rightarrow Z'(x)g(x) + Z(x)g'(x) = \underbrace{[A(x)Z(x)]}_{Z'(x)}g(x) + F(x) \Rightarrow Z(x)g'(x) = F(x)$$

Dunque:

$$\boxed{g(x) = \int_{\bar{x}}^{x} Z^{-1}(t)F(t)\,dt}$$

Dunque l'integrale particolare si ottiene come $\boxed{u(x) = Z(x)\int_{\bar{x}}^{x} Z^{-1}(t)F(t)\,dt}$

Inoltre $y(x) = Z(x)c + Z(x)\int_{\bar{x}}^{x} Z^{-1}(t)F(t)\,dt$.

Si ricordi infine che le componenti dell'integrale particolare si ottengono con la seguente formula:

$$\boxed{w_j = u_j = \sum_{1}^{m} \ell \int_{\bar{x}}^{x} \frac{W_{j\ell}(x,t)}{W(t)}\varphi_\ell(t)\,dt} \qquad \text{con } j = 1, \dots, m$$

Vediamo ora qualche esempio:

1) Sia:
$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 - 2\operatorname{Sen}x \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cos x \end{cases}$$

un sistema lineare completo e siano in $I = \left] -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right[$

$$z_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\operatorname{Tg}x \end{bmatrix}, \quad z_2(x) = \begin{bmatrix} \operatorname{Tg}x \\ 1 \end{bmatrix}$$

due integrali particolari del sistema omogeneo associato.

a) Verificare che i due integrali siano linearmente indipendenti in I

b) Determinare i coefficienti $a_{jk}(x)$ del sistema

c) Scrivere l'integrale generale.

a) $Z(x) = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{Tg}x \\ -\operatorname{Tg}x & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow W(x) = \operatorname{Det} Z(x) = 1 + \operatorname{Tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$

Dunque la matrice $Z(x)$ è fondamentale perciò gli integrali sono linearmente indipendenti.

b) $Z'(x) = A(x)Z(x) \Rightarrow A(x) = Z'(x)Z^{-1}(x)$. Dunque: $A(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\cos^2 x} \\ -\frac{1}{\cos^2 x} & 0 \end{bmatrix} \cdot \cos^2 x \begin{bmatrix} 1 & -\operatorname{Tg}x \\ \operatorname{Tg}x & 1 \end{bmatrix}$

$$A(x) = \begin{bmatrix} \cos^2 x & -\cos^2 x \operatorname{Tg}x \\ \cos^2 x \operatorname{Tg}x & \cos^2 x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\cos^2 x} \\ -\frac{1}{\cos^2 x} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 - 1 & 1 - 0 \\ 0 - \operatorname{Tg}x & \operatorname{Tg}x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\operatorname{Tg}x & \operatorname{Tg}x \end{bmatrix}$$

c) $u(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix} \rightarrow$ int. particolare.

utilizzando il metodo delle costanti arbitrarie si ha: $u(x) = Z(x)\int_{\bar{x}}^{x} F(t)Z^{-1}(t)\,dt$.

$u(x) = \ldots$, $Z^{-1}(t)F(t) = \cos^2 t \begin{bmatrix} 1 & -\operatorname{Tg}t \\ \operatorname{Tg}t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2\operatorname{Sen}t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\operatorname{Sen}t\cos^2 t \\ -2\operatorname{Sen}^2 t\cos t + \cos^3 t \end{bmatrix}$