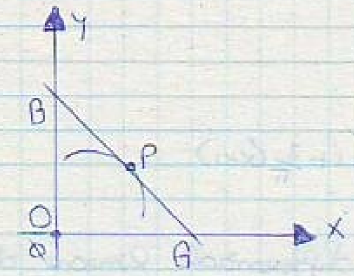

Siano: $\overline{OA} = xy' - y/y'$ $\Rightarrow$ $1/\left(\frac{xy'-y}{y'}\right)^2 + 1/(y-xy')^2 = 1$, cioè: $y = xy' \pm \sqrt{y'^2+1}$

$\overline{OB} = y - xy'$

Quest'ultima è un'equazione di Clairaut.

$y = xc \pm \sqrt{c^2+1}$ è l'integrale generale.

L'integrale singolare:

$$x = \mp \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \Rightarrow c = \mp \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{c^2+1} = 1/\sqrt{1-x^2}$$

Dunque sostituendo si ha:

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

3) Integrare la seguente equazione differenziale:

$$y = x/y' + xy'/2$$

e determinare la linea integrale tangente alla retta $y = x+1$.

L'equazione è in forma non normale risolta rispetto a y. Posto $y'(x) = p(x)$ si ottiene:

$$y = \frac{x}{p(x)} + \frac{xp(x)}{2}$$, e derivando ambo i membri rispetto a x si ottiene:

$$p = 1/p + p/2 + x\left(-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2}\right) dp/dx \Rightarrow \frac{p^2-2}{2p^2}\left(p - x\, dp/dx\right) = 0$$

$$p^2 - 2 = 0 \quad e \quad p - x\, dp/dx = 0$$

Per la prima si ha: $p^2 = 2 \Rightarrow p = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = x/\pm\sqrt{2} + \frac{x\sqrt{2}}{2} = \pm\sqrt{2}\cdot x$

integrale singolare.

Per la seconda si ha:

$$p = kx \Rightarrow y(x) = 1/k + k\frac{x^2}{2} \quad (k \neq 0)$$

Linee tangenti alla retta $y = x+1 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y'(2) = 1 \Rightarrow 3 = 1/k + 2k$, $2k^2 - 3k + 1 = 0$

cioè:

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases} \Rightarrow y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2}, \; y_2(x) = 2 + \frac{x^2}{4}$$

4) Integrare l'equazione:

$$y'' + \frac{2x}{1+x^2}\, y' = 0$$

passante per il punto $P(1,1)$ e tangente alla retta $y = 1 + \frac{2}{\pi}(x-1)$.
Posto $y'(x) = p(x)$ si ottiene:

$$p'(x) = -\frac{2x}{1+x^2}\, p(x)$$, che è un'eq. differenziale lineare del primo ordine.

$$\Downarrow$$

$$p(x) = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx} \cdot C = C \frac{1}{e^{\int 2x/1+x^2 dx}}$$. Siccome $\int \frac{2x}{1+x^2}dx$ è:

$1+x^2 = t \Rightarrow t-1 = x^2 \Rightarrow \sqrt{t-1} = x \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t-1}}dt$

Dunque: $C e^{-\int \frac{2\sqrt{t-1}}{t}\frac{1}{2\sqrt{t-1}}dt} = Ce^{-\int \frac{1}{t}dt} = Ce^{-\log t} = C \cdot e^{-\log 1+x^2} = \frac{C}{1+x^2}$

Siccome $p(x) = y'(x)$ si ha ancora:

$$y(x) = Be^{\int \frac{C}{1+x^2}dx}$$ = non è un'eq. lineare.

Bisogna procedere in questo modo:

$$y(x) = C\int \frac{dx}{1+x^2} = C \operatorname{arctg} x + B$$

La linea deve soddisfare $y(1) = 1$, $y'(1) = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{2}{\pi} = \frac{C}{2} \Rightarrow C = \frac{4}{\pi} \Rightarrow B = 0$

$\Downarrow$

linea: $y(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x$

5) $(e^x+1)y'' - y' = 0$, linee integrali che ammettono $\lim_{x\to+\infty} = \ell$ finito, $\lim_{x\to-\infty}$ = infinitesimo.
Posto:

$$p(x) = y'(x) \Rightarrow p'(x) = y''(x) \Rightarrow (e^x+1)p'(x) - p(x) = 0 \Rightarrow p(x) = (e^x+1)p'(x)$$

$\Downarrow$

$$p'(x) = \frac{p(x)}{(e^x+1)}$$

Dunque: $p(x) = Ce^{\int \frac{1}{e^x+1}dx} = Ce^{x-\log(e^x+1)} = \frac{Ce^x}{e^x+1}$

Integrando di nuovo si ottiene: $\Rightarrow y(x) = C\log(e^x+1) + B$

$\lim_{x\to+\infty} C\log(e^x+1) + B = B$ per $A = 0$

$\lim_{x\to-\infty} C\log(e^x+1) + \cancel{B}^{=0} = C\log(e^x+1)$ è infinitesimo.

6) $xy'' + y' = \log x$ $(x>0)$ λ? per cui: $\begin{cases} y(1) + y'(1) = \lambda \\ y(e) = -e \end{cases}$

$y' = p \Rightarrow y'' = p' \Rightarrow xp' + p = \log x \Rightarrow \frac{\log x - p}{x} = p' \Rightarrow p(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[C + \int e^{\log x}\frac{\log x}{x}dx\right] =$
$= \frac{1}{x}\left[C + \int \log x\, dx\right] = \frac{1}{x}C + \log x - 1 \Rightarrow$ Integrando: $y(x) = C\log x + x\log x - 2x + B$

Problema ai limiti: $\begin{cases} -2 + B + A - 1 = \lambda \\ A + e - 2e + B = -e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = \lambda + 3 \\ A = -B \Rightarrow A + B = 0 \end{cases}$ $\underline{(\lambda = -3)}$ $A = C$

$y(x) = A(\log x - 1) + x\log x - 2x \quad (A = -B)$

7) $y'' = y' + \frac{1}{2y'} e^{3x}$. Pr. di Cauchy: $\begin{cases} y(0) = 1/3 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Integriamo: $p(x) = y'(x)$ e $y''(x) = p'(x) \Rightarrow p'(x) = p(x) + \frac{1}{2p(x)} e^{3x} = \frac{2p(x)^2 + e^{3x}}{2p(x)} =$

$\Rightarrow p'(x) = p(x) + \frac{e^{3x}}{2p(x)}$ con $d = -1$ è un'eq. di Bernoulli

Dunque: $\Rightarrow \frac{p'(x)}{2p(x)} = \frac{1}{2} + e^{3x}$. Posto $z = p^2 \Rightarrow 2pp' = z' \Rightarrow z' = 2z + e^{3x}$

$\Downarrow$

$z(x) = e^{2x}(C + e^x)$

$y' = p = \pm\sqrt{z} = \pm e^x\sqrt{C + e^x} \Rightarrow$ eq. a variabili separabili: $y = k \pm \frac{2}{3}(C + e^x)^{3/2}$

Vediamo ora di risolvere il pr. di Cauchy:

$y'(0) < 0 \Rightarrow y' = -e^x\sqrt{C + e^x}$, $y'(0) = -1 \Rightarrow -1 = -\sqrt{C+1}$, $C = 0$.

Rimane: $y = k - \frac{2}{3} e^{3x/2}$

$y(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = k - \frac{2}{3} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow y(x) = 1 - \frac{2}{3} e^{3x/2}$.

8) $xy'' = y' + \sqrt{x^2 + y'^2}$ $(x > 0)$ e Pr. di Cauchy: $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$

Posto: $y' = p(x)$ e $p'(x) = y''(x) \Rightarrow$ eq. omogenea: $xp' = p + \sqrt{x^2 + p^2} \Rightarrow p' = \frac{p}{x} + \frac{x + p}{x} =$

$= p/x + \sqrt{1 + \left(\frac{p}{x}\right)^2}$. Il suo integrale è: $p = \frac{A^2x^2 - 1}{2A}$ con $(Ax^2 - p \geq 0)$.

Integrando si ottiene: $y(x) = +\frac{A}{6}x^3 - \frac{x}{2A} + B$

$\Downarrow$

$\begin{cases} A^2 - 1/2A = 1 \Rightarrow A^2 = \sqrt{2A+1} \quad (y(1) = 0 \Rightarrow A = 1) \\ A/6 - \frac{1}{2A} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{2A} - \frac{A}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{se } A = 1 \end{cases}$

Dunque:

$$\boxed{y = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}$$

9) $xy'' - y' - \log y'' = 0$

$\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow y'(x) = p(x)$ e $y''(x) = p'(x) \Rightarrow xp'(x) - p(x) - \log p' = 0 \Rightarrow p'(x)x - \log p' = p$

$\Downarrow$

eq. di Clairaut.

Perciò l'integrale generale è:

$$p = cx - \log c$$

L'integrale singolare è:

$$p_c = x - 1/c \quad \text{e si ha:} \quad \begin{cases} p = cx - \log c \\ x - 1/c = 0 \Rightarrow 1/c = x \Rightarrow c = 1/x \Rightarrow p = 1 + \log x \end{cases}$$

Integrando l'integrale generale e singolare si ottiene:

$$\begin{cases} y + k = c\frac{x^2}{2} - x\log c \\ y + k = x\log x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + k = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \quad \text{con } c = 1 \ (y'(1) = 1 \Rightarrow c = 1). \\ 1 + k = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow \underline{y_2(x) = 1 + x\log x} \end{cases} \Downarrow \underline{y_1(x) = \frac{1+x^2}{2}}$$

10) $yy'' = y'^2 + 4$. Questa è un'equazione che non contiene la x. Dunque:

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p(y)\frac{dp}{dy}$$

Sostituendo si ottiene:

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2 + 4 \Rightarrow \text{separando le variabili:} \quad p\frac{dp}{p^2+4} = \frac{dy}{y}$$

da cui: $\log cy = \frac{1}{2}\log p^2 + 4 \Rightarrow c^2y^2 = p^2 + 4$ e quindi: $(c_1 > 0)$

$$\Downarrow$$

$$p = y' = \pm\sqrt{c^2y^2 - 4}$$

Dunque:

$$\frac{dy}{\sqrt{c^2y^2-4}} = \pm dx \quad , \quad \pm x + k = \int \frac{dy}{\sqrt{c^2y^2-4}} \quad \text{, e posto } y = \tfrac{2}{c}\,\mathrm{Ch}\,t \text{ si ottiene:}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c^2y^2-4}} = \int \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Sh}\,t}{\sqrt{\mathrm{Ch}^2 t - 1}} = \frac{t}{c} = \frac{1}{c}\,\mathrm{SettCh}\,\frac{cy}{2} \quad \text{. Quindi:}$$

$$\pm x + kc = \mathrm{SettCh}\,\frac{cy}{2}$$

$$\boxed{y = \tfrac{2}{c}\,\mathrm{Ch}(k \pm x)c}$$

11) $y'' + \mathrm{Sen}\,y\,\mathrm{Cos}\,y = 0$. Integrale soddisfacente a: $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Dunque: $pp' = -\mathrm{Sen}\,y\,\mathrm{Cos}\,y$, $p^2 = \mathrm{Cos}^2 y + C$. Siccome $y = 0$ e $y' = p = -1$
si ottiene:

$$C = 0 \text{ e } y' = p = \pm\mathrm{Cos}\,y$$

$$\Downarrow$$

$$y' = -\mathrm{Cos}\,y$$

Inoltre per $y(0)=0$ si ha: $y = 2\operatorname{arctg} e^{-x} - \pi/2$.

12) $y'' = \dfrac{y'^2 - 2y'}{y}$ con $\begin{cases} y(0)=3 \\ y'(0)=2 \end{cases}$

Dunque: $p = y'$ e $pp' = y'' \Rightarrow pp' = \dfrac{p^2-2p}{y} \Rightarrow p' = \frac{1}{y}p - \frac{2}{y}$

$p(y) = y\left[C - 2\int \dfrac{dy}{y^2}\right] = Cy + 2$

$y'(x) = Cy(x) + 2$. Questa è ancora un'equazione differenziale lineare e perciò:

$$y(x) = e^{Cx}\left[H + 2\int e^{-Cx}\,dx\right] = \begin{cases} He^{Cx} - 2/C & \text{se } C \neq 0 \\ H + 2x & \text{se } C = 0 \end{cases}$$

Riassumendo:

$y(x) = H + 2x$

$y(x) = He^{Cx} - 2/C \quad (C \neq 0)$

Siccome $y'(0) = 2$ e $y(0) = 3 \Rightarrow C = 0$ e $H = 3$ e pertanto: $\boxed{y(x) = 3 + 2x}$

SISTEMI ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Prendiamo in esame tre funzioni:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$$

Possiamo effettuare una combinazione lineare di queste tre funzioni nella seguente maniera:

$$\boxed{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x)}$$

dove c_1, c_2, c_3 sono tre costanti arbitrarie. Queste tre funzioni sono linearmente indipendenti quando:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0 \quad \text{per } c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Le tre funzioni sono linearmente dipendenti quando:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0 \quad \text{per } c_1 \neq c_2 \neq c_3 \neq 0$$ (almeno una costante diversa da zero).

Ad esempio le seguenti tre funzioni:

$$f_1(x) = 2x,\ f_2(x) = 3x^2,\ f_3(x) = 5$$

sono linearmente indipendenti. Infatti l'espressione:

$$c_1 2x + c_2 3x^2 + c_3 5$$

è nulla solo per $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Invece le seguenti tre funzioni:

$$f_1(x) = \operatorname{sen}^2 x,\ f_2(x) = 6,\ f_3(x) = \cos^2 x$$

sono linearmente dipendenti. Infatti l'espressione:

$$c_1 \operatorname{sen}^2 x + c_2 6 + c_3 \cos^2 x = 0$$

per c_1 e $c_3 = 1$ e $c_2 = -1/6$. Infatti: $\operatorname{sen}^2 x - 1 + \cos^2 x = 0 \Rightarrow 1 - 1 \equiv 0$

In generale se le funzioni della combinazione lineare sono linearmente dipendenti, allora si può rappresentare una generica funzione come una combinazione lineare delle altre funzioni.

$$\boxed{f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x) - \frac{c_3}{c_1} f_3(x)}$$

Non sempre però il processo di riconoscimento della dipendenza o dell'indipendenza di una combinazione lineare è così semplice. A volte è necessario utilizzare un metodo che ci consenta di fare ciò in modo più semplice. Il metodo è quello di studiare un certo determinante così strutturato:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

Se tale determinante è nullo, allora le funzioni $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ sono linearmente indipendenti. Se lo stesso determinante è non nullo allora le tre funzioni sono linearmente dipendenti. Si noti soltanto che tale metodo rappresenta una condizione necessaria e sufficiente.
Ad esempio:

$$c_1 2x + c_2 3x^2 + c_3 5 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 & 5 \\ 2 & 6x & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \Rightarrow \text{linearmente indipendenti}$$

Prendiamo ora in esame i seguenti vettori:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \\ \vdots \\ \alpha_n(x) \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} \beta_1(x) \\ \beta_2(x) \\ \vdots \\ \beta_n(x) \end{bmatrix}$$

La loro combinazione lineare è:

$$c_1Y_1 + c_2Y_2 = c_1 \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \\ \vdots \\ \alpha_n(x) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \beta_1(x) \\ \beta_2(x) \\ \vdots \\ \beta_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\alpha_1(x) \\ c_1\alpha_2(x) \\ \vdots \\ c_1\alpha_n(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2\beta_1(x) \\ c_2\beta_2(x) \\ \vdots \\ c_2\beta_n(x) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1\alpha_1(x) + c_2\beta_1(x) \\ c_1\alpha_2(x) + c_2\beta_2(x) \\ \vdots \\ c_1\alpha_n(x) + c_2\beta_n(x) \end{bmatrix}$$

$$*$$

Questi due vettori sono linearmente indipendenti quando $[*] = 0$ per $c_1 = c_2 = 0$.
Invece questi due vettori sono linearmente dipendenti quando:

$$[*] = 0 \quad \text{per } c_1 \neq 0 \text{ o } c_2 \neq 0 \text{ o } c_3 \neq 0.$$

Chiusa questa parte relativa alle combinazioni lineari, passiamo a definire il concetto di sistema lineare; un sistema è lineare quando è scritto nella seguente maniera:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + \varphi_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + \varphi_2(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + \varphi_n(x) \end{cases}$$