valgono per il problema di Cauchy e per le equazioni e i sistemi in forma normale.

1) Th di $\exists e!$ in piccolo: Supponiamo che $f, f_y \in C^0(A)$, e $\bar{P} \in A \Rightarrow$ Il problema

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ \bar{y} = y(\bar{x}) \end{cases}$$ ammette una e una sola soluzione.

Ad esempio: $$\begin{cases} y' = e^{x+2y} - \text{sen}(3x+5y) + x^2 \\ y(3) = 5 \end{cases}$$

$f(x,y)$ è continua per $\forall x,y$. Inoltre: $f_y = 2e^{x+2y} - 5\cos(3x+5y)$ è anch'essa continua $\forall x,y$.

2) Th di $\exists$ in piccolo: Se $f(x,y) \in C^0(A)$ e $\bar{P}(\bar{x},\bar{y}) \in A \Rightarrow$ il problema ha soluzioni. Non so se questa però è unica.

Ad esempio: $$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y-x} + 1 \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

$f(x,y) \in C^0(A) \; \forall x,y$.

$f_y(x,y) = \frac{1/3}{\sqrt[3]{(y-x)^2}}$ non è sempre definita.

3) Th di $\exists e!$ in grande: se $f, f_y \in C^0(D)$, $\bar{P} \in D$ con $\bar{x} > a$ e $\bar{x} < b$. f_y si mantenga limitata, cioè:

$$|f_y| < M, \; \forall (x,y) \in D \quad \text{con } D: \begin{cases} a \le x \le b \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$$

Se tali ipotesi sono soddisfatte si ha che esiste una e una sola soluzione prolungabile in tutto $a \dashv b$. Ad esempio:

$$y' = y^3 \Rightarrow f_y = 3y^2,$$ che non è mai una funzione limitata.

Nel caso di un'equazione lineare tale teorema si può sempre usare. Infatti:

$$y' = \varphi(x)y + \psi(x)$$

$f_y = \varphi(x)$ e $f_y(x,y) \in C^0(D)$, ed è sempre $\varphi(x) < M$ perché $a \le x \le b$.

Dunque per un'equazione lineare gli integrali sono prolungabili in ogni intervallo di continuità dei coefficienti e dei termini noti.

Vediamo ora di classificare alcuni integrali. Abbiamo detto che la totalità degli integrali particolari genera l'integrale generale. Ma cosa è un integrale particolare? Un integrale particolare è un integrale formato partendo da un problema di Cauchy in condizioni di $\exists e!$ e prolungato poi fin dove è possibile. Ad esempio:

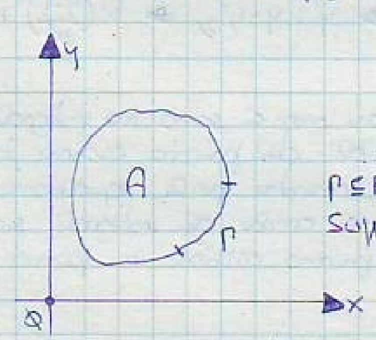
1) $\begin{cases} xy' = y + \log x \\ y(\frac{1}{2}) = 3 + \log 2 \end{cases} \Rightarrow 3 + \log 2 = Cx - \log x - 1$ dove $Cx - \log x - 1$ è l'integrale generale.

$\Downarrow$

$C = 8 \Rightarrow y = 8x - \log x - 1$

Dunque $y = 8x - \log x - 1$ è un integrale particolare perché soddisfa un ben determinato problema di Cauchy. Inoltre essendo $f(x,y) = y + \log x /_{x}$, ed essendo questa continua per $\forall x, y$ con $x \neq 0$ insieme a $f_y = 1 + \log x /_{x^2}$, allora siamo anche in condizione di $\exists e!$.

Un altro tipo di integrale che riveste una certa importanza è l'integrale di frontiera. Prendiamo in esame il campo A di figura:



$\Gamma \subseteq FA$, dove FA è la frontiera di A.
Supponiamo che $f(x,y)$ e $f_y(x,y)$ siano continue in A.

Noi non sappiamo se sulla frontiera vale il teorema di $\exists e!$. Mi chiedo se $f(x,y) \in C^0$(arco della frontiera). In breve per verificare ciò basta:

- Per quali valori $f(x,y)$ è continua nel campo A
- Per gli stessi valori $f_y(x,y)$ non deve essere continua.

Ad esempio:

1) $y' = 3x\sqrt{y - 2x} + 2$

Posto $f(x,y) = 3x\sqrt{y-2x} + 2$, essa è continua per $y = 2x$. Per tale valore però la $f_y(x,y)$ che è:

$$f_y(x,y) = \frac{3x}{2\sqrt{y-2x}}$$

non è continua.

2) $y' = e^x\sqrt{y - x^2} + \varphi(x)$, che ha come integrale di frontiera $y = x^2$ se e solo se $\varphi(x) = 2x$.

Infine ci sono gli integrali misti che altro non sono che degli integrali particolari di frontiera. Un ultimo tipo di integrale è l'integrale singolare. Tale integrale si trova eliminando la y' tra l'equazione differenziale e la funzione $f_{y'}$ che altro non è che la

funzione ottenuta derivando l'equazione differenziale rispetto a y'.
Ad esempio:

1) $y'^2 - 2y'e^x + y^2 = 0$, derivando si ottiene:

$\varphi_{y'} = 2y' - 2e^x = 2(y' - e^x) = 0$

$\begin{cases} y'^2 - 2y'e^x + y^2 = 0 \\ 2(y' - e^x) = 0 \end{cases} \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow e^{x^2} - 2e^{x^2} + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = e^{x^2} \Rightarrow y = \pm e^x$

2) $xy'^2 - y^2 + 1 = 0$
$\varphi_{y'} = 2xy' = 0 \Rightarrow \begin{cases} xy'^2 - y^2 + 1 = 0 \\ 2xy' = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \pm 1$

3) $xy'^2 - yy' + 1 = 0$, $\varphi_{y'} = 2xy' - y + 1 = 0 \Rightarrow y' = y - 1/2x \Rightarrow x\left(\frac{y-1}{2x}\right)^2 + 1 - y\left(\frac{y-1}{2x}\right) = 0$
$\Rightarrow y(x) = 2\sqrt{x}$ e $-2\sqrt{x}$.

Si ricordi che per le equazioni differenziali lineari non ci sono né integrali di frontiera né misti. Infine diciamo che per le equazioni differenziali del primo ordine in forma normale ci sono solo integrali particolari e di frontiera, mentre per le equazione differenziali del primo ordine in forma non normale ci sono anche gli integrali singolari. Vediamo ora di introdurre le equazione differenziali del primo ordine in forma non normale. Queste equazioni sono del tipo:

$$y' - f(x,y) = \varphi(x) \text{ oppure a } 0.$$

Vediamo, prima con la teoria, poi con gli esercizi, quanto appena scritto. Un'equazione in forma non normale viene sovente scritta nella seguente maniera:

$$\boxed{\phi(x,y,y') = 0}$$

Osservando tale espressione si nota che questa è una funzione implicita. Anche qui ci viene in aiuto il teorema del Dini. Se $\phi(x,y,y') \in C^0(A)$ e $\phi = 0$, $\phi_{y'} \neq 0$ in un punto di A, allora si ha che $y' = f(x,y)$. Questa funzione è definita implicitamente dall'equazione $\phi(x,y,y') = 0$. Facciamo ora le seguenti ipotesi:

- $f(x,y,z) = 0$
  $f, f_z \in C^0(A)$
  $\bar{P} \in A$
  $f(\bar{P}) = 0$
  $f_z(\bar{P}) \neq 0 \Rightarrow$ l'equazione è univocamente risolubile rispetto a z, nel punto $\bar{P}$.

  Dunque: $z = g(x,y) \in C^0(T)$.
  Si supponga inoltre che:

  $\begin{cases} f_x \in C^0(A) \\ f_y \in C^0(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_x \in C^0(T) \\ z_y \in C^0(T) \end{cases}$

Si desideri ora risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases}\phi(x,y,y')=0\\ y(\bar{x})=\bar{y}\end{cases}$$ con le ipotesi: $\phi, \phi_y \in C^0(A)$

$$\Downarrow$$

$$\phi(\bar{x},\bar{y},\bar{y}')=0$$

NESSUNA SOLUZIONE

$$\begin{cases}y'=\alpha\\ y'=\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\bar{x},\bar{y},\alpha)\\ (\bar{x},\bar{y},\beta)\end{cases}$$ sono radici dell'equazione.

Da tutto ciò ottengo che $y'=f(x,y) \equiv \alpha = f(\bar{x},\bar{y})$. Ma succede anche che $y'=\beta=f(\bar{x},\bar{y})$. Dunque si viene a scoprire una cosa molto importante. Per le equazioni differenziali in forma non normale viene a mancare l'univocità. In sostanza, si ha che se trovo n radici dell'equazione troverò n linee integrali passanti per il punto $P(\bar{x},\bar{y})$.
Ad esempio:

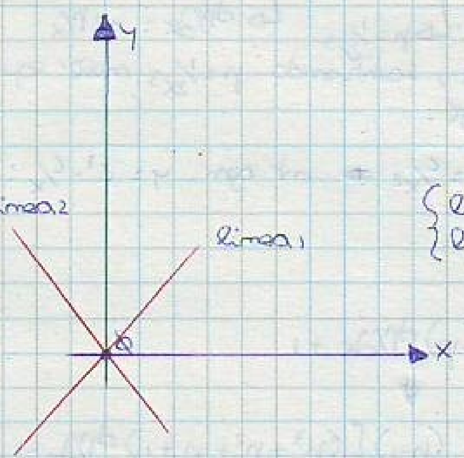
1) $$\begin{cases}\cos(x+3y)+x^2-2y+xy'^2+e^{y'^2-1}=0\\ y(0)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\phi(x,y,y')=\cos(x+3y)+x^2-2y+xy'^2+e^{y'^2-1}=0\\ \phi(0,0,y')=1-e^{y'^2-1}=0 \Rightarrow e^{y'^2-1}=1 \Rightarrow y'=\pm 1\end{cases}$$

Siccome l'equazione è univocamente risolubile rispetto a y', cioè:

$$\phi_{y'}=2xy'-2y'e^{y'^2-1} \Rightarrow 1=f(x,y) \text{ e } -1=f(x,y)$$

Dunque ci sono ben due linee passanti per l'origine.
Graficamente:



$\begin{cases}\text{linea 1 ha coeff angolare } 1\\ \text{linea 2 " " " } -1\end{cases}$

Vediamo ora di classificare brevemente alcune equazioni differenziali in forma non normale; Innanzitutto ci sono:

* i) Equazioni risolte rispetto a y

2) Equazioni di Clairaut

3) Equazioni del II ordine mancanti della y

4) Equazioni del II ordine mancanti della x

5) " " " " mancanti della x e della y.

Analizziamo il primo tipo. Un'equazione differenziale del primo ordine in forma non normale, risolta rispetto a y viene detta tale quando è nella forma:

$$\boxed{y = \varphi(x)y' + \psi(x) \ldots}$$

Le equazioni di questo tipo vengono risolte in questa maniera:

$y' = p \Rightarrow$ sostituisco nell'equazione originale e derivo entrambi i membri per x.

Vediamo subito qualche esempio:

1) $y = x^4 y'^2 - x y'$

Posto $y' = p \Rightarrow y = x^4 p^2 - xp$. Derivando rispetto a x si ottiene:

$$p = y' = 4x^3 p^2 - p + (2x^4 p - x)\, dp/dx$$

ricordandosi che $\underline{p = y'}$. Dunque:

$$(2x^3 p - 1)(x\, dp/dx + 2p) = 0$$

$\hookrightarrow p = 1/2x^3$ $\quad$ $\hookrightarrow dp/dx = -2p/x$

Perciò si trova l'integrale $y = -1/4x^2$, sostituendo $p = 1/2x^3$ nell'equazione di partenza. Inoltre, $\log p = -2\log x + \log C$.

$$\Downarrow$$

$p = C/x^2 \Rightarrow$ int. gen. $y = C^2 - C/x$.

2) $y = y'^5/5 - y' + x$

Posto $y' = p \Rightarrow$ derivando: $p = (p^4 - 1)\, dp/dx + 1$

$$\Downarrow$$

$$(p-1)\left[(p^3 + p^2 + p + 1)\, dp/dx - 1\right] = 0$$

Una soluzione è $p = 1 \Rightarrow y = x - 4/5$

Segue poi che:

$$x = p^4/4 + p^3/3 + p^2/2 + p + C$$

In questo caso l'integrale generale è dato, in forma parametrica, da:

$$\begin{cases} x = p^4/4 + p^3/3 + p^2/2 + p + C \\ y = p^5/5 + p^4/4 + p^3/3 + p^2/2 + C \end{cases}$$

Analizziamo ora le equazioni di Clairaut. Un'equazione differenziale è di Clairaut quando è del tipo:

$$\boxed{y = xy' + \varphi(y')}$$

Integrare un'equazione di questo tipo è semplicissimo. Basta sostituire y' con C e si trova una famiglia di rette di equazione $y = Cx + \varphi(C)$. Si ricordi solo che il rispetto inviluppo è l'integrale singolare che si ottiene eliminando C tra $y = Cx + \varphi(C)$ e la sua derivata rispetto a C. Ad esempio:

1) Integrare $y = xy' - \frac{3}{2} y'^{2/3}$

L'integrale generale è: $y = xC - \frac{3}{2} C^{2/3}$
Derivando tale integrale per C si ottiene: $y = x - C^{-1/3}$ $\Rightarrow$ $y = -\frac{1}{2}x^{-2}$ è inviluppo o integrale singolare.

2) $\begin{cases} y = xy' - \log y' \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Integrale generale: $y = Cx - \log C$
Integrale singolare: $y = 1 + \log x$
Posto $y(1) = 1$ nell'integrale generale si ottiene: $1 = C - \log C$ $\Rightarrow$ $C = 1$
Siccome anche l'integrale singolare ammette o meglio soddisfa tale condizione, si ha:

$y = x$ e $y = 1 + \log x$ sono sol.

3) $y = \log x$, scrivere eq di Clairaut. $\log x = 1 + f(1/x)$, $f(1/x) = -1 - \log(1/x)$

Poiché $y' = 1/x$ $\Rightarrow$ $f(y') = -1 - \log(y')$

$\Downarrow$

$y = xy' - 1 - \log y'$, che è l'equazione richiesta.

Vediamo ora il terzo tipo di equazione. Un'equazione si dice del secondo ordine mancante della y quando:

$$\varphi(x) = y'' + C$$

Ad esempio:

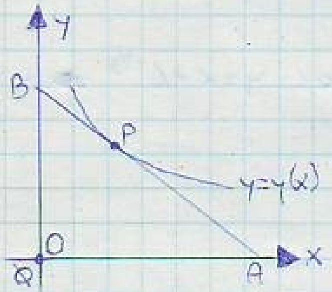
1) $x^2 y'' = y'^2$. Posto $y' = p$ $\Rightarrow$ $y'' = p'$ $\Rightarrow$ $x^2 p' = p^2$ che è un'equazione a variabili separabili.
$\Rightarrow x^2 dp/dx = p^2$ $\Rightarrow$ $y(x) = \int \frac{x}{C_1 x + 1} dx + C_2$ $\begin{cases} x^2/2 + C_2 \text{ per } C_1 = 0 \\ 1/C_1 x - 1/C_1^2 \log|C_1 x + 1| + C_2 \text{ per } C_1 \neq 0 \end{cases}$

Per le equazioni differenziali mancanti della x bisogna prima ricavare gli integrali del tipo $y(x)=$ costante. Dopodiché si sostituisce $y'=p$, $y''=p'$, e si procede come nel caso precedente. Analogamente si ha per le equazioni differenziali mancanti della x e della y. Infine per quanto riguarda i problemi che concernono questo tipo di equazioni differenziali, il ragionamento seguito è lo stesso. Facciamo ora una serie di esempi riassuntivi:

1) Scrivere e integrare l'equazione differenziale alla quale soddisfano le linee Γ di proprietà:

1) La tangente in $P(x,y(x))$ interseca in A l'asse x (>0)
2) " " " " in B l'asse y (>0)
3) Area triangolo $OAB = 2$.

Si ricordi infine che la linea $y=y(x)$ sta nel primo quadrante.



L'equazione della retta è la seguente: $(X-x)y'(x) = Y-y(x)$

Coordinate dei punti A e B:

$$A: \begin{cases} X = \dfrac{y'(x)x - y(x)}{y'(x)} = -\dfrac{y(x)}{y'(x)} + x \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} Y = y(x) - xy'(x) \\ X = 0 \end{cases}$$

Inoltre: $\frac{1}{2}(y(x)-xy'(x))\left(-\frac{y(x)}{y'(x)}+x\right) = 2 \Rightarrow 4y' = (y(x)-xy'(x))\left(-\frac{y(x)}{y'(x)}+x\right)$

Più precisamente si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ y = xy' + 2\sqrt{-y'} \\ \bullet\ y = xy' + (-2)\sqrt{-y'} \end{array}\right\} \text{sono due eq. di Clairaut.}$$

Siccome deve essere x e $y>0 \Rightarrow y = xy'+2\sqrt{-y'}$ è l'unica valida. L'integrale generale è:

$$y = xC + 2\sqrt{-C}$$

e $xy=1$ è l'integrale singolare.

2) Trovare linee Γ tali che $\frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} = 1$