$$y^2+1 = c^2x^2 - 2cxy + y^2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{c^2x^2-1}{2c}}$$, che è l'integrale generale.

Vediamo ora le equazioni differenziali omogenee. Un'equazione differenziale si dice omogenea quando è del tipo:

$$\boxed{y' = f(y/x)}$$

Posto $y/x = t \Rightarrow y' = t + xt'$. Dopo una serie di passaggi puramente aritmetici si giunge ad un'equazione differenziale a variabili separabili.
Ad esempio:

1) $y' = y/x + \sqrt{1+(y/x)^2}$ è un'equazione differenziale omogenea.

Posto $y/x = t \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t + xt' \Rightarrow \cancel{t} + xt' = \cancel{t} + \sqrt{1+t^2} \Rightarrow t' = \frac{\sqrt{1+t^2}}{x}$
Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\sqrt{1+t^2} \Rightarrow \frac{1}{x}dx = 1/\sqrt{1+t^2}\,dt$$

In breve: $\int 1/x \, dx = \int 1/\sqrt{1+t^2}\, dt \Rightarrow \log x + c = \mathrm{SettSh}\, t \Rightarrow \dots$ in base all'esempio precedente: $y = \frac{c^2x^2-1}{2c}$.

2) $x^2y' = x^2 + xy + y^2 \Rightarrow y' = 1 + y/x + y^2/x^2$. Posto $y/x = t \Rightarrow y' = t + xt'$
Dunque:

$$\cancel{t} + xt' = 1 + \cancel{t} + t^2 \Rightarrow xt' = 1+t^2 \Rightarrow \frac{1+t^2}{x} = t' \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{x} \Rightarrow \frac{1}{x}dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

Separando le variabili e integrando si ottiene: $\log x + c = \operatorname{arctg} t \Rightarrow \log(cx) = \operatorname{arctg} t \Rightarrow \operatorname{tg}(\log(cx)) = t \Rightarrow y/x = \operatorname{tg}(\log(cx)) \Rightarrow y = x\operatorname{tg}(\log(cx))$.

Infine descriviamo le equazioni differenziali esatte con fattore integrante. In genere un'equazione differenziale esatta è un'equazione del tipo:

$$-\frac{X(x,y)}{Y(x,y)} = y' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-X(x,y)}{Y(x,y)} \Rightarrow -X(x,y)dx = Y(x,y)dy \Rightarrow X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0.$$

Questa forma si dice esatta quando $\boxed{X_y = Y_x}$ (C.N.S). Quando la forma è esatta per integrarla basta:

$$\boxed{I = \int_{x_0}^{x} X(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y)\,dy}$$

Se la forma non è esatta cioè se $X_y \neq Y_x$ si ha che per trovare l'integrale generale bisogna seguire queste condizioni:

* $\frac{X_y - Y_x}{Y} = \varphi(x)$ funzione della sola $x \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx}$

** $Y_x - X_y/X = \psi(y)$ " " " $y \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \psi(y)dy}$

Facciamo subito alcuni esempi:

1) $(x-3y^2)dx + (6xy + \frac{x^2}{y})dy = 0$

Posto: $\begin{cases} X(x,y) = x-3y^2 \\ Y(x,y) = 6xy + x^2/y \end{cases} \Rightarrow X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$

Controlliamo che la forma sia esatta o meno. $\begin{cases} X_y = -6y \\ Y_x = 6y + \frac{2xy}{y^2} = 6y + \frac{2x}{y} \end{cases}$

Come si può facilmente notare la forma non è esatta in quanto $X_y \neq Y_x$.

$X_y - Y_x/Y = -6y - (6y + \frac{2x}{y})/Y = -12y - \frac{2x}{y}/6xy + \frac{x^2}{y} = \frac{-12y^2-2x/y}{\frac{6xy^2+x^2}{y}} = \frac{-12y^2-2x}{6xy^2+x^2} = -2/x$.

Quindi: $\mu(x) = e^{\int -2/x\,dx} = e^{-2\log x} = 1/x^2$

Moltiplicando ambo i membri per $1/x^2$ si ottiene:

$$(1/x - 3y^2/x^2)dx + (6y/x + 1/y)dy = 0$$

Dunque una volta trovato il fattore integrante μ, bisogna moltiplicarlo per l'intera espressione:

$$\boxed{\mu(x)(X(x,y))dx + \mu(x)(Y(x,y))dy = 0}$$

A questo punto si controlla nuovamente se la nuova forma è esatta.

$\begin{cases} X_y = -6y/x^2 \\ Y_x = -6y/x^2 \end{cases} \Rightarrow$ la forma è esatta e perciò possiamo integrarla.

$I = \int_{x_0}^{x} X(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y)dy \Rightarrow I = \int_{x_0}^{x}(1/x - \frac{3y^2}{x^2})dx + \int_{y_0}^{y}(6y/x_0 + 1/y)dy = 0$

Dunque:

$I = \int_{x_0}^{x} 1/x\,dx - 3y^2\int_{x_0}^{x} 1/x^2\,dx + 1/x_0\int_{y_0}^{y} 6y\,dy + \int_{y_0}^{y} 1/y\,dy \Rightarrow \int_{x_0}^{x} 1/x\,dx = \log x - \log x_0$

$, \int_{x_0}^{x} 1/x^2\,dx = 3y^2/x - 3y^2/x_0 \quad , 3y^2/x_0 - 3y_0^2/x_0 + \log y - \log y_0.$

Concludendo: $I = \log x - \log x_0 - 3y^2/x - 3y^2/x_0 + 3y^2/x_0 - 3y_0^2/x_0 + \log y - \log y_0 = \ldots$

$= 3y^2/x + \log|xy| = C$, ponendo $x_0 = y_0 = 1$

2) $(1+xy)dx + x^2dy = 0$. Posto $\begin{cases} X(x,y) = 1+xy \\ Y(x,y) = x^2 \end{cases} \Rightarrow X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$

$\begin{cases} X_y = x \\ Y_x = 2x \end{cases} \Rightarrow X_y \neq Y_x$ e la forma non è esatta. $\frac{X_y - Y_x}{X} = \varphi(x) = \frac{x-2x}{1+xy} = \frac{-x}{1+xy}$

Posto $\mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx} = e^{-\log x} = 1/x \Rightarrow 1/x(1+xy)dx + x\,dy = 0$

Verifichiamo che:

$$\Downarrow$$

$$(1/x + y)dx + x\,dy$$

$\begin{cases} X_y = 1 \\ Y_x = 1 \end{cases} \Rightarrow$ la forma è esatta. Dunque:

$I = \int_1^x (1/x + y)dx + \int_0^y x\,dy = \log x - 0 + yx - y + xy - 0 = 0$

$\| I = \log|x| + xy = C \|$

Abbiamo così introdotto alcuni tipi di equazioni differenziali. Si noti comunque come tutti gli integrali generali trovati dipendano da una costante arbitraria c. Se prendiamo per esempio l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare dell'esempio numero 1 si ha:

$$\boxed{y = \frac{c+x}{\cos x}}$$

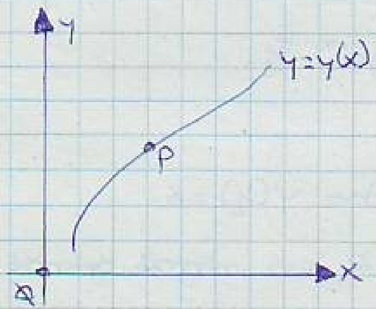
Se al posto della costante c sostituiamo dei numeri, come per esempio:

$$y = \frac{2+x}{\cos x}, \quad y = \frac{3+x}{\cos x}, \quad \frac{\sqrt{2}+x}{\cos x} = y$$

troviamo tanti integrali tutti aventi differenti valori di c. Possiamo pensare a questi come a degli integrali particolari. In questo caso l'unione di tutti i possibili integrali particolari forma l'integrale generale. Prendiamo ora in esame un particolare integrale:

$$y = \frac{2+x}{\cos x}$$

La linea di equazione $y = y(x)$, dove $y(x) = \frac{2+x}{\cos x}$ è la linea integrale relativa al caso particolare in cui $c=2$. Dunque questa è una tra le tante (infinite) linee integrali aventi quella equazione. Può capitare di voler verificare se una data linea integrale passa per un generico punto P. Graficamente:



In questo caso non si vuole calcolare la totalità degli integrali particolari, cioè l'integrale generale, bensì si desidera trovare un certo integrale passante per il punto P. Per fare ciò bisogna imporre delle condizioni. Consideriamo un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale generica:

$$\boxed{y' = f(x,y)}$$

Consideriamo un punto $\bar{P}(\bar{x},\bar{y})$ e verifichiamo che per il punto $\bar{P}$ passi una e una sola linea integrale. Se tale linea esiste bisogna verificare che sia unica. Integrando la precedente equazione differenziale si trova una linea integrale Γ di equazione $y = y(x)$ tale che:

$$f(x, y(x)) = 0$$

Perché tale linea passi per il punto $\bar{P}(\bar{x},\bar{y})$ è necessario che:

$$\bar{y} = y(\bar{x})$$

Se tale linea esiste, allora la sua retta tangente in $\bar{P}$ è: $\boxed{y'(\bar{x}) = f(\bar{x}, y(\bar{x})) = f(\bar{x},\bar{y})}$

In generale si può scrivere: (per i sistemi in forma normale)

$$\underline{y_j' = f_j(x, y, y_1, \dots, y_n)} \quad \text{con } j = 1, \dots, n$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\bar{y}_j = y_j(\bar{x})}$$

Questo problema è noto come Problema di Cauchy o dei valori iniziali. In breve si desidera verificare solo se una certa linea integrale passa per un punto $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$.
Facciamo degli esempi:

1) Integrare $y' + \cos y = 0$ e trovare linea γ passante per $y(0) = 0$.
L'equazione è a variabili separabili e quindi:

$$dy/dx = -\cos y \Rightarrow -dy/\cos y = dx \Rightarrow \int dx = -\int \frac{dy}{\cos y}$$

Siccome $\int \frac{dy}{\cos y} \Rightarrow t = \operatorname{tg} y/2 \Rightarrow y = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dt = \frac{2dt}{1+t^2}$ con $\cos y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Dunque: $\int \frac{dy}{\cos y} = 2\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \log \frac{1+t}{1-t} = \log \frac{\operatorname{tg}\pi/4 + \operatorname{tg} y/2}{1 - \operatorname{tg}\pi/4 \operatorname{tg} y/2} = \log\operatorname{tg}(\pi/4 + y/2) \Rightarrow \log\operatorname{tg}(\pi/4 + y/2) = -x + c \Rightarrow c = 0$ per $x = 0$ e $y(0) = 0$
Quindi l'integrale cercato è:

$$y = 2\operatorname{arctg} e^{-x} - \pi/2 .$$

2) $xy' = y + \log x$. Trovare integrale dove $y'(1/2) = 6$.

L'equazione data è lineare ed il suo integrale generale è $y = cx - \log x - 1$.
Siccome:

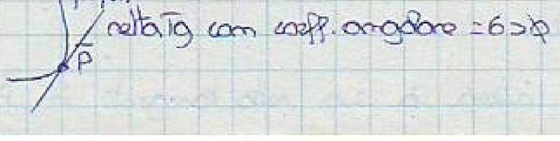
$$y' = y/x + \log x / x \Rightarrow 6 = y/\tfrac{1}{2} + \log\tfrac{1}{2}/\tfrac{1}{2} \Rightarrow 3 = y + \log\tfrac{1}{2} \Rightarrow y = 3 - \log\tfrac{1}{2}$$

$= 3 + \log 2$. Dunque: $y'(1/2) = 6$ e $y(1/2) = 3 + \log 2$.

In questo modo ci siamo ricondotti ad un problema di Cauchy. Dunque:

$3 + \log 2 = \frac{1}{2}c - \log\frac{1}{2} - 1 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow \boxed{y = 8x - \log x - 1}$ che è la linea cercata.

Dal secondo esempio si può facilmente intuire come non sempre il problema di Cauchy sia posto in modo esplicito. Nel primo esempio è bastato calcolare l'integrale generale dell'equazione, e sostituire i valori $x = 0$ e $y(0) = 0$. Successivamente è stata calcolata c, e sostituita nell'integrale generale. Nel secondo esempio, la condizione era che nel punto $x = 1/2$ la derivata fosse 6 cioè nel punto $\bar{P}$, il coefficiente angolare della retta tangente in $\bar{P}$ fosse 6. In questo caso si ha:



Facciamo un altro esempio:

2) $(2y-x)y' = 2x+y$, che abbia in $x=-1$ un punto di minimo relativo.

Un minimo è innanzitutto un punto stazionario. Perciò:

$$y'(-1)=0$$

Sapendo che: $y' = \frac{2x+y}{2y-x} \Rightarrow 0 = \frac{-2+y}{2y+1} \Rightarrow y=2$. Siccome $y(-1)=2$, bisogna ora verificare che $x=-1$ sia realmente un punto di minimo.

$y''(-1) = ? \rightarrow (2y'-1)y' + (2y-x)y'' = 2+y' \Rightarrow y''(-1) = 2/5 > 0$ e il punto è di minimo. Sapendo che l'integrale generale è: $y^2 - xy - x^2 = C$ si ottiene:

$$C=5 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{5x^2+20}).$$

Dunque osservando questo esempio si ha che bisogna innanzitutto verificare se il punto in considerazione è un minimo o un massimo. Per fare ciò, basta verificare il segno della derivata seconda. Dopo di che si è ricondotti nuovamente a un problema di Cauchy. Vediamo ora di introdurre altri problemi derivati da quello di Cauchy. Può succedere di voler studiare la linea integrale γ tangente ad una linea ℓ. Occorre dapprima determinare l'eventuale punto di tangenza, dopo di che si è di nuovo ricondotti ad un problema di Cauchy. Ad esempio:

1) Trovare una linea integrale di $x^2y' = (x-1)y$ che risulti tangente a ℓ di equazione

$$y = 2x+4$$

Innanzitutto troviamo il punto di tangenza. $y'=2 \Rightarrow$ sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene: $P(2,8)$. Infatti $y'=2 \Rightarrow x^2 \cdot 2 = (x-1)y \Rightarrow 2x^2 = xy - y$

Sostituendo si ottiene: $\frac{2x^2}{(x-1)} = 2x+4 \Rightarrow 2x^2 = 2x+4\,(x-1) \Rightarrow$ Siccome $y = 2x+4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 = (x-1)(2x+4) \Rightarrow \cancel{2x^2} = \cancel{2x^2} - 2x + 4x - 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$. Sostituendo x in $y = 2x+4 \Rightarrow y = 8$.

Successivamente si ha che: $y = Cxe^{1/x}$ è l'integrale generale. Sostituisco a $y=8$, $x=2$ e ottengo: $C=4 \Rightarrow \underline{y = 4xe^{1/x - 1/2}}$.

A volte invece è necessario trovare la linea integrale che taglia ortogonalmente un'altra linea. Supponiamo per esempio di voler trovare la linea integrale che incontri ortogonalmente la retta di equazione $x=1$. L'equazione differenziale è un'equazione di Bernoulli:

$$y' = 2xy\left(\frac{1}{1+x^2} - \sqrt{y}\right)$$

Vediamo di integrarla: Posto $y^{1/2} = y^q$ con $q = \frac{1}{2} \Rightarrow y'/\sqrt{y} = 2xy/_{1+x^2} - 2xy$. In realtà si ha:

$$y' = \frac{2xy}{1+x^2} - 2xy\sqrt{y} = \frac{2xy}{1+x^2} - 2xy^{3/2} \Rightarrow y'/_{y^{3/2}} = \frac{2x}{1+x^2}\,y^{-1/2} - 2x.$$ Posto $z = y^{-1/2}$

si ha $z' = -\frac{1}{2y^{3/2}} \Rightarrow 2z' = -\frac{2x}{1+x^2}\,z + 2x \Rightarrow z' = -x/_{1+x^2}\,z + x$. Dunque:

$y(x)^{1/2} = 1/z(x) \Rightarrow z(x) = 1/y(x)^{1/2} = e^{-\int x/1+x^2 dx} [C + \int x e^{\int x/1+x^2 dx} dx]$. Siccome:

$\int x/1+x^2 dx \Rightarrow 1+x^2 = t \Rightarrow t-1 = x^2$, cioè: $x = \sqrt{t-1} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t-1}} dt$, perciò:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{\sqrt{t-1}}{t} \frac{1}{2\sqrt{t-1}} dt = \int \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}\log|t| + C = \frac{1}{2}\log|1+x^2| + C$$

Dunque: $y(x)$ o meglio $z(x) = e^{-\frac{1}{2}\log|1+x^2|} [C + \int x e^{\frac{1}{2}\log x} dx] = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{3}(1+x^2)$

Pertanto:

$$y^{1/2} = \frac{1}{z} = \frac{3\sqrt{1+x^2}}{3C + (1+x^2)^{3/2}} \Rightarrow y(x) = \frac{9(1+x^2)}{[3C + (1+x^2)^{3/2}]^2}$$

Affinché la linea integrale incontri ortogonalmente la retta $x=1$, deve essere $y' = \infty$. Sostituendo questi valori si ottiene:

$$\infty = y(1)[1 - 2\sqrt{y(1)}].$$

e quindi:

$$\begin{cases} y(1) = \infty \\ \sqrt{y(1)} = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \text{Pr. di Cauchy.}$$

Dunque: la retta $y = \infty$ soddisfa la prima delle precedenti condizioni. Invece per la seconda si ha:

$$\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{3C + 2\sqrt{2}} \Rightarrow C = 4/3\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{9(1+x^2)}{[4\sqrt{2} + (1+x^2)^{3/2}]^2}$$

Infine citiamo un ultimo tipo di problema. Di solito dobbiamo trovare o l'integrale generale o l'integrale particolare di una determinata equazione differenziale. Può accadere però di conoscere già l'integrale generale e di voler risalire alla relativa equazione differenziale. Per fare ciò basta calcolare la costante C dall'integrale, derivare quest'ultimo, e sostituire la stessa nella derivata. Facciamo subito qualche esempio:

1) $y = \log(x^2 + Cx)$, $y' = \frac{2x + C}{x^2 + Cx}$ con $C = \frac{e^y - x^2}{x}$

Dunque: $y' = \dfrac{2x + \frac{e^y - x^2}{x}}{x^2 + \left(\frac{e^y - x^2}{x}\right)x} = \dfrac{2x + \frac{e^y - x^2}{x}}{e^y} = \frac{2x}{e^y} + \frac{e^y - x^2}{xe^y} = xe^{-y} + 1/x$.

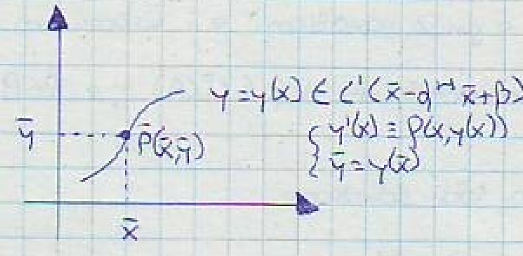
2) $Cx - xy = C \Rightarrow C - Cx = -xy \Rightarrow xy = Cx - C = C(x-1) \Rightarrow xy/x-1 = C \Rightarrow y = \frac{Cx - C}{x} \Rightarrow y' = \frac{Cx - Cx + C}{x^2}$

Dunque:

$$y' = +xy/x-1/x^2 = \frac{+xy}{x^2(x-1)} = \frac{+y}{x(x-1)}.$$

Con questo chiudiamo i problemi inerenti in qualche modo al problema di Cauchy per iniziare lo studio del problema AI LIMITI. Abbiamo visto precedentemente come il problema di Cauchy sia un problema in piccolo descrivibile nella seguente maniera:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ \bar{y} = y(\bar{x}) \end{cases}$$



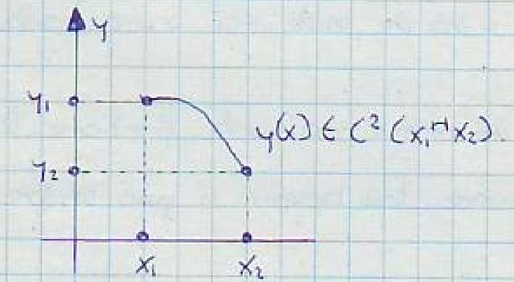
Questo vale per un'equazione differenziale del primo ordine del tipo $y' = f(x,y)$. Per un'equazione del secondo o del terzo ordine si ha:

2°: $\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ \bar{y} = y(\bar{x}) \\ \bar{y}' = y'(\bar{x}) \end{cases}$

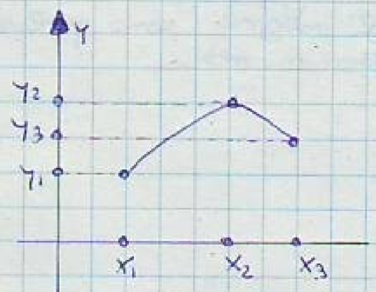
3° $\begin{cases} y''' = f(x,y,y',y'') \\ \bar{y} = y(\bar{x}) \\ \bar{y}' = y'(\bar{x}) \\ \bar{y}'' = y''(\bar{x}) \end{cases}$

Un problema ai limiti è invece un problema in grande. In questo problema bisogna solo verificare se esiste una linea che passi per almeno due punti distinti P_1 e P_2 ($P_1 \neq P_2$). Questo problema ha validità solo per le equazioni differenziali di ordine superiore al primo.

2° $\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$



3° $\begin{cases} y''' = f(x,y,y',y'') \\ y_1 = y(x_1) \\ y_2 = y(x_2) \\ y_3 = y(x_3) \end{cases}$



Vale la pena ricordare che sia per le equazioni che per i sistemi differenziali si ha che l'integrale generale dipende da n costanti arbitrarie se n è l'ordine dell'equazione o del sistema. Torneremo più tardi su questo argomento.
Vediamo ora di analizzare un teorema che sta alla base della teoria delle equazioni differenziali. Il teorema di esistenza e unicità ($\exists e!$). In realtà lo stesso è diviso in tre teoremi fondamentali che forniscono solo una condizione sufficiente, e