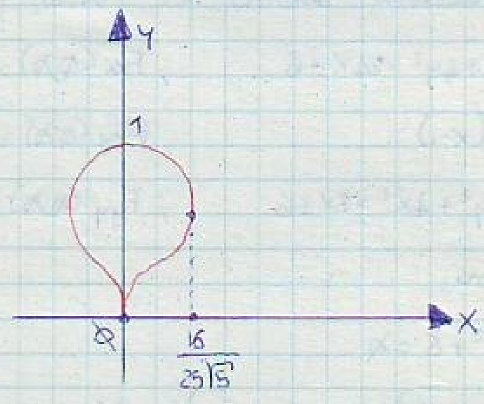
Siccome nell'origine l'unica derivata non nulla è: ϕ_{xx}, si considera l'equazione:

$$\phi_{yy}(0,0) + \frac{2}{m}\phi_{xy}(0,0) + \frac{1}{m^2}\phi_{xx}(0,0) = 0$$

dove $\frac{1}{m} = \frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta} = \operatorname{cotg}\vartheta \Rightarrow 2\operatorname{cotg}^2\vartheta = 0$ ammette la radice doppia $\operatorname{cotg}\vartheta = 0$
Quindi l'origine è una cuspide. Inoltre:

$$\left(\pm\frac{16}{25\sqrt{5}}, \frac{4}{5}\right)$$ sono punti a tangente verticale.

Alla fine graficamente si ha:



6) Trovare l'inviluppo della famiglia di linee piane:

$$(y-t)^2 - (1-x^2)(1+x^2) = 0$$

6) Cerchiamo i punti singolari:

$$f(x,y,t) = (y-t)^2 - (1-x^2)(1+x^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f(x,y,t) = (y-t)^2 - (1-x^2)(1+x^2) = 0 \\ f_x(x,y,t) = 2x(1+x)^2 - 2(1-x^2)(1+x) = 2(1+x)^2(2x-1) = 0 \\ f_y(x,y,t) = 2(y-t) = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ricava che $y = t \Rightarrow (x=-1, y=t)$. $P(-1,t)$ è un punto singolare.

$$f_{xx}(x,y,t) = 4(1+x)(2x-1) + 4(1+x)^2 = 12x(1+x)$$
$$f_{xy}(x,y,t) = 0$$
$$f_{yy}(x,y,t) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$2m^2 = 0$$

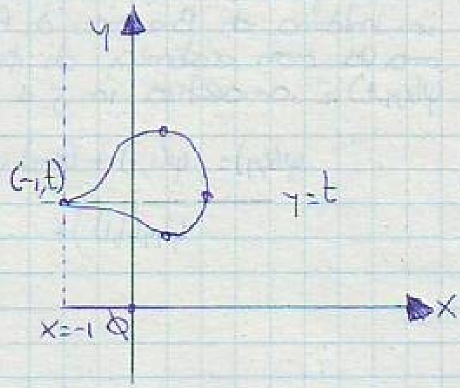
Quindi $(-1,t)$ è una cuspide con tangente di equazione $y=t$ parallela all'asse delle x. Determiniamo l'inviluppo:

$$\begin{cases} f(x,y,t) = (y-t)^2 - (1-x^2)(1+x)^2 = 0 \\ f_t(x,y,t) = -2(y-t) = 0 \end{cases}$$

Eliminando t si trova $x=1$, $x=-1$. Scartata la retta $x=-1$ perché è luogo di punti singolari, facendo variare t, si ha:

$$x=1$$

che è l'inviluppo per la famiglia considerata.



7) Verificare che l'equazione:

$$e^{xyz} - |x| - z^2\sqrt[3]{x+y+1} = 0 \qquad (*)$$

è univocamente risolubile rispetto a z in un intorno del punto $A(0,0,1)$ e del punto $B(1,1,0)$. Precisare inoltre che cosa si può dire sulle proprietà delle due funzioni $z=\phi(x,y)$ e $z=\psi(x,y)$ definite implicitamente dalla $(*)$ rispettivamente nell'intorno di A e B (dire cioè se sono continue o dotate di derivate parziali di un certo ordine o analitiche.)

7) Posto:

$$f(x,y,z) = e^{xyz} - |x| - z^2\sqrt[3]{x+y+1}$$

$$\Downarrow$$

$$f_x(x,y,z) = \begin{cases} yz\, e^{xyz} - 1 - \dfrac{z^2}{3\sqrt[3]{(x+y+1)^2}} & x>0 \\[2ex] yz\, e^{xyz} + 1 - \dfrac{z^2}{3\sqrt[3]{(x+y+1)^2}} & x<0 \end{cases}$$

$$f_y(x,y,z) = xz\, e^{xyz} - \frac{z^2}{3\sqrt[3]{(x+y+1)^2}} \quad , \quad f_z(x,y,z) = xy\, e^{xyz} - 2z\sqrt[3]{(x+y+1)}$$

Dunque: $\begin{cases} f(0,0,1)=0 & \text{con } f_z(0,0,1)=-2\neq 0 \\ f(1,1,0)=0 & \text{con } f_z(1,1,0)\neq 0=1 \end{cases}$

Quindi f è univocamente risolubile rispetto a z in A e B. Inoltre $\phi(x,y)=z$ e $z=\psi(x,y)$ sono continue in un intorno di A e B e quindi sono continue in un intorno I di $(0,0)$, la prima, e in un intorno J di $(1,1)$ la seconda. Inoltre:

$$f_y(x,y,z) \text{ è continua se } x+y+1\neq 0.$$

Quindi f_y è continua in un intorno di A e B e quindi ϕ_y e ψ_y sono continue in I e J. Ma:

$$f_x(x,y,z)$$

non è però continua in $x=0$ oltre che in $x+y+1=0$. Essa è perciò continua in un intorno di B e non di A. Dunque si ha la esistenza di ψ_x continua in J, ma la non esistenza di ϕ_x. Nell'intorno di B, $f(x,y,z)$ è analitica e quindi anche $\psi(x,y,z)$ è analitica in J e quindi sviluppabile in serie di Taylor:

$$\psi(x,y)=\psi(1,1)+(x-1)\psi_x(1,1)+(y-1)\psi_y(1,1)+\tfrac{1}{2}\Big((x-1)^2\psi_{xx}(1,1)+2(x-1)(y-1)\psi_{xy}(1,1)+(y-1)^2\psi_{yy}(1,1)\Big)+\dots$$

* EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Si definisce equazione differenziale, un'equazione del seguente tipo:

$$\boxed{F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0}$$

Questo tipo di equazione lega la variabile indipendente x con una funzione incognita y, e con le sue derivate $y', y'', \dots, y^{(n)}$. La funzione F è una funzione definita in un campo A dello spazio S_{n+2}. Una soluzione della precedente equazione è una qualsiasi funzione incognita y(x) tale che sostituita nell'espressione la renda identicamente nulla.

$$\boxed{F(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n)}(x))\equiv 0}$$

Ad esempio:

$$e^{y''}-y'\operatorname{sen}(x-y)-1=0$$

. $y=x$ è una soluzione dell'equazione differenziale. Infatti posto $y=x$ nella stessa si ha che questa è identicamente nulla.

$$e^{0}-1\operatorname{sen}(y-y)-1\equiv 0 \quad, \text{con } \begin{cases} y'=1 \\ y''=0 \end{cases}$$

La linea di equazione $y=y(x)$ viene detta linea integrale. Dunque l'equazione differenziale altro non è che una proprietà che possiede la linea integrale. Un'equazione differenziale è del primo ordine quando la derivata di ordine massimo che compare è y'. Ad esempio:

$$y'-x+2=0$$

, è un'equazione differenziale del primo ordine.

In generale un'equazione differenziale è di ordine n quando la derivata massima che compare è $y^{(n)}$. Ad esempio:

$$y^{n}-y^{(n-1)}=0$$

Generalmente un'equazione differenziale può essere posta in forma normale e in forma non normale. Un'equazione differenziale è in forma normale quando è risolta rispetto alla derivata di ordine massimo. Ad esempio:

$$y''=\log y'-x+1$$

Un'equazione differenziale è in forma non normale quando è scritta nella seguente maniera:

$$y''-e^{y'}+2=0$$

Prendiamo ora in esame la seguente equazione differenziale:

$$y'=K$$

Integrare un'equazione differenziale vuol dire trovare quella funzione y(x) tale che sostituita nell'equazione stessa la renda identicamente nulla. Per questa equazione l'integrale da ricercare è $y=Kx$. Infatti:

$$\int y'dx=\int K\,dx=K\int dx=Kx$$

In particolare se $K=1$ si ha:

$$\int y'\,dx = \int 1 \cdot dx = \int dx = x + c_1$$

Dunque abbiamo trovato che dalle eq. differenziale $y'=K$, si possono trovare tante linee (∞) che dipendono da una costante K. Queste linee integrali hanno tutte la stessa cosa in comune: provengono, o meglio soddisfano tutte la stessa equazione differenziale. Tutte queste linee messe insieme formano una famiglia. L'integrale di un'equazione differenziale può essere di molti tipi. Per ora analizzeremo solo l'integrale generale. Iniziamo lo studio delle varie equazioni differenziali ordinarie suddividendole:

1) Equazioni differenziali ordinarie lineari
2) Equazione differenziale di Bernoulli
3) Equazione differenziale a variabili separabili
4) Equazione differenziale omogenea
5) Equazione differenziale esatta con fattore integrante

Un'equazione differenziale si dice lineare quando è un polinomio di primo grado rispetto all'incognita y.

$$\boxed{y' = p(x)y + g(x)}$$

Per trovare il suo integrale generale si usa la seguente formula:

$$y(x) = e^{\int p(x)dx}\left[c + \int g(x)\, e^{-\int p(x)dx}\,dx\right].$$

Ad esempio:

1) $y' = y\,\mathrm{Tg}x + 1/\cos x$. Siano: $\begin{cases} p(x) = \mathrm{Tg}x \\ g(x) = 1/\cos x \end{cases}$

$$y(x) = e^{\int \mathrm{Tg}x\,dx}\left[c + \int 1/\cos x\, e^{-\int \mathrm{Tg}x\,dx}\,dx\right] = e^{\int \mathrm{Tg}x\,dx}\left[c + \int 1/\cos x \cdot 1/e^{\int \mathrm{Tg}x\,dx}\,dx\right]$$

Sapendo che: $\int \mathrm{Tg}x\,dx = -\int \frac{\mathrm{Sen}x}{\cos x}dx$, siamo nella forma $\int \frac{p'(x)}{p(x)}dx$, visto che: $\begin{cases} p(x) = \cos x \\ p'(x) = -\mathrm{Sen}x \end{cases} \Rightarrow \int p'(x)/p(x)\,dx = -\int 1/\cos x\,dx$.

Dunque: $y(x) = e^{-\int 1/\cos x\,dx}\left[c + \int 1/\cos x \cdot e^{\int 1/\cos x\,dx}\,dx\right] = e^{-\log|\cos x|}\left[c + \int \frac{1}{\cos x}\, e^{\log|\cos x|}\,dx\right] = 1/\cos x\left[c + \int 1/\cos x \cdot \cos x\,dx\right] = 1/\cos x\left[c + \int dx\right] =$

$= 1/\cos x\,[c + x] = c/\cos x + x/\cos x = \frac{c+x}{\cos x}$

Dunque l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare $y' = \mathrm{Tg}x \cdot y + 1/\cos x$ è:

$$\boxed{y = \frac{c+x}{\cos x}}$$

2) $y' = -\frac{2x}{1+x^2}y + 1$. Siano: $\begin{cases} p(x) = -2x/1+x^2 \\ g(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx}\left[c + \int 1 \cdot e^{\int 2x/1+x^2\,dx}\,dx\right.$

$= \frac{1}{e^{\int 2x/1+x^2 dx}} \left[c + \int e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} dx \right]$; Sapendo che: $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$, $1+x^2 = t \Rightarrow t-1 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t-1}$
$dx = \frac{1}{2\sqrt{t-1}} dt$.

Quindi: $\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{2\sqrt{t-1}}{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-1}} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + k$

$y(x) = e^{-\log|1+x^2|} \left[c + \int e^{\log|1+x^2|} dx \right] = \frac{1}{1+x^2} \left[c + \int 1+x^2 dx \right] = \boxed{\frac{1}{1+x^2} \left[c + x + \frac{x^3}{3} \right]}$. Quest'ultimo è l'integrale generale dell'equazione data.

3) $y' = \frac{2x}{x^2-1}(y-1)$. Posto: $\begin{cases} p(x) = \frac{2x}{x^2-1} \\ g(x) = -2x/x^2-1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{\int \frac{2x}{x^2-1} dx} \left[c + \int \frac{-2x}{x^2-1} e^{-\int \frac{2x}{x^2-1} dx} dx \right]$;

Sapendo che: $\int \frac{2x}{x^2-1} dx$; $x^2-1 = t \Rightarrow t+1 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t+1} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \Rightarrow \int \frac{2\sqrt{t+1}}{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t+1}} dt =$
$= \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + k$

Dunque: $y(x) = e^{\log|x^2-1|} \left[c + \int \frac{-2x}{x^2-1} e^{-\log|x^2-1|} dx \right] = x^2-1 \left[c + \int \frac{-2x}{x^2-1} \cdot \frac{1}{x^2-1} dx \right] =$
$= x^2-1 \left[c + \int \frac{-2x}{(x^2-1)^2} dx \right] \Rightarrow$ Posto: $x^2-1 = t$ si ottiene:

$$\int \frac{-2x}{(x^2-1)} dx = \int \frac{-2\sqrt{t+1}}{t^2} \frac{1}{2\sqrt{t+1}} dt = \int -\frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{t}$$

$y(x) = x^2-1 \left[c + \frac{1}{x^2-1} \right] = c(x^2-1) + \frac{1}{\cancel{x^2-1}} \cdot \cancel{x^2-1} = \boxed{cx^2 - c + 1}$ che è l'integrale generale.

Un'equazione differenziale può essere però anche di Bernoulli. Un'equazione differenziale è di Bernoulli quando è del tipo:

$$y' = \varphi(x) y + \psi(x) y^{d}.$$

Un esempio di equazione differenziale di Bernoulli è il seguente:

$$y' = 2xy + \frac{1}{2} y^3 \quad \text{con } d = 3.$$

Ecco alcuni esempi:

1) $y' = -y/x + 2y^2 \log x$. Posto: $\begin{cases} \varphi(x) = -1/x \\ \psi(x) = 2\log x \end{cases} \Rightarrow \frac{y'(x)}{y^d} = -\frac{1}{yx} + 2\log x$. Posto $z = \frac{1}{y} \Rightarrow$
Dunque siamo ricondotti a studiare un'equazione lineare. Infatti: $z' = -\frac{1}{y^2} y'$

$$z' = \frac{1}{x} z + 2\log x \Rightarrow z(x) = e^{\int 1/x \, dx} \left[c + \int 2\log x \, e^{-\int 1/x \, dx} dx \right] =$$
$$= e^{\log x} \left[c + \int 2\log x / x \, dx \right] = x \left[c + 2 \int \log x / x \, dx \right].$$ Dunque:

$$z = x(c - \log^2 x)$$

Sapendo che:
$z = y^{-1} \Rightarrow \boxed{y = z^{-1} = 1/x(c - \log^2 x)}$ che è l'integrale generale dell'eq.

2) $x^3 y' = x^2 y + y^2 \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}$. Posto $z = \frac{1}{y}$ e dividendo entrambi i membri per y^d con $d = 2$ si ottiene: $\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^3}$.

Posto $z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{1}{y^2}y' \Rightarrow z' = -\frac{1}{x}z + \frac{1}{x^3} \Rightarrow z(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[c + \int \frac{1}{x^3} e^{\int \frac{1}{x}dx} dx\right] =$
$= \frac{1}{x}\left[c + \int \frac{1}{x^2}dx\right] = \frac{1}{x}c + \frac{1}{x^2} = \frac{xc+1}{x^2}$. Siccome $z(x) = \frac{1}{y(x)} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{z(x)} =$
$= \boxed{\frac{x^2}{cx+1}}$ che è l'integrale generale.

Dunque quando si ha a che fare con un'equazione differenziale di Bernoulli bisogna procedere in questo modo:

1) Dividere entrambi i membri dell'espressione per y^q.

$$y' = \varphi(x)y + \psi(x)y^q \Rightarrow \frac{y'}{y^q} = \frac{\varphi(x)}{y^q}y + \psi(x)$$

2) Porre $z = \ldots$, in modo che $z' = \frac{1}{y^q}y'$.

3) Sostituire in modo che alla fine si giunga ad un'equazione differenziale lineare del tipo:

$$z' = f(x)z + g(x)$$

4) Integrare suddetta equazione e fare in modo che l'integrale generale sia relativo a y.

Esiste un altro tipo di equazione differenziale denominato a variabili separabili, ed è del tipo: $\boxed{y'(x) = X(x) \cdot Y(y)}$

Questo tipo di equazione differenziale viene integrata separando le variabili. Più precisamente:

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = X(x) \cdot Y(y) \Rightarrow \frac{1}{Y(y)}\frac{d}{d} = X(x) \Rightarrow X(x)dx = \frac{dy}{Y(y)}$$

Quindi integrando si ottiene:

$$\int X(x)dx = \int \frac{dy}{Y(y)}$$

Facciamo qualche esempio:

1) $y' = e^x\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x\sqrt{1-y^2} \Rightarrow e^x dx = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy$. Integrando si ottiene: $\int e^x dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = e^x = \arcsin y \Rightarrow \underline{y = \operatorname{sen}(e^x + c)}$, che è l'integrale generale dell'equazione data. Si noti che in questo caso $Y(y) \neq 0$.

2) $xy' = \sqrt{1+y^2} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{x}\sqrt{1+y^2}$. Siccome $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\sqrt{1+y^2} \Rightarrow \frac{1}{x}dx = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}dy$
Dunque: $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}dy \Rightarrow \log|x| + c = \operatorname{settsh} y \Rightarrow$ Se $\operatorname{settsh} y = \log(y + \sqrt{1+y^2})$ allora: $\log x + c = \log(y + \sqrt{1+y^2}) \Rightarrow \log cx = \log(y + \sqrt{1+y^2}) \Rightarrow cx = y + \sqrt{1+y^2}$. Dunque: