Calcoliamo:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 6x(x^2+y^2-a^2)^2 + 54a^2xy^2 \\ f_y(x,y) = 6y(x^2+y^2-a^2)^2 + 54a^2x^2y \end{cases}$$

Sostituiamo ora $x = a/2^{3/2}$ e $y = a/2^{3/2}$ ottenendo:

$$f_x(P) = f_y(P) = \frac{3a}{\sqrt{2}}\left(\frac{a^2}{2^2} - a^2\right)^2 + 54\frac{a^5}{2^4\sqrt{2}} = \frac{81}{2^4\sqrt{2}}a^5 \neq 0$$

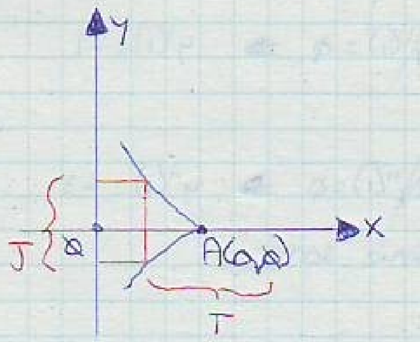
Quindi il punto P è semplice, e inoltre essendo f, f_x, f_y continue, per il teorema del Dini l'equazione è univocamente risolubile sia rispetto a x che rispetto a y. Inoltre:

$$y'\left(a/2^{3/2}\right) = -\frac{f_x(P)}{f_y(P)} = -1$$

Quindi:

eq. tangente in P: $x+y = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Nel punto $A(a,0)$ f_x e f_y si annullano quindi il teorema del Dini non ci garantisce nulla. Però si può notare che l'equazione è univocamente risolubile rispetto a x e non rispetto a y nell'intorno del punto A. Infatti:



$\forall y_1 \in J$, $f(x, y_1) = 0 \Rightarrow$ 1 sola radice $x_1 \in T$.

Viceversa $\forall x_1 \in T$, $f(x_1, y) = 0 \Rightarrow$ più radici $y_1 \in J$.

2) Verificare che l'equazione:

$$e^{x+2y-1} + \operatorname{Sh} xy - \cos(3x+y-3) - 2y = 0$$

è univocamente risolubile rispetto a y, in un intorno della radice $(x=1, y=0)$ e che la funzione $y=y(x)$, definita implicitamente dalla precedente equazione, è analitica in un intorno di $x=1$. Sempre in un intorno di tale punto, darne lo sviluppo in serie di Taylor (arrestato alle derivate seconde) e disegnarne un grafico approssimato.

3)

Posto: $\begin{cases} f(x,y) = e^{x+2y-1} + \operatorname{Sh} xy - \cos(3x+y-3) - 2y \\ f_y(x,y) = 2e^{x+2y-1} + x \operatorname{Ch} xy + \operatorname{Sen}(3x+y-3) - 2 \end{cases}$

Sostituisco $x=1$, $y=0$ e ottengo:

$$f_y(1,0) = 2e^0 + 1\operatorname{Ch}0 + \operatorname{Sen}0 - 2 = 1 \neq 0$$

Dunque l'equazione è univocamente risolubile rispetto a y in $(x=1; y=0)$. Inoltre essendo $f(x,y)$ somma di funzioni elementari è una funzione analitica, e quindi $y=y(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor per $x=1$.

$$y(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = y(1) + (x-1)y'(1) + (x-1)^2\frac{y''(1)}{2!} + \dots$$

Calcoliamo $y'(1)$:

$$e^{x+2y(x)-1}(1+2y'(x)) + (y(x)+xy'(x))\operatorname{Ch} xy(x) + (3+y'(x))\operatorname{Sen}(3x+y(x)-3) - 2y'(x) \equiv 0$$

$$e^{x+2y(x)-1}\left((1+2y'(x))^2 + 2y''(x)\right) + \left(2y'(x)+xy''(x)\right)\operatorname{Ch} xy(x) + \left(3+y'(x)\right)^2\cos(3x+y(x)-3)$$
$$+\, y''(x)\operatorname{Sen}(3x+y(x)-3) + (y(x)+xy'(x))^2\operatorname{Sh} xy(x) - 2y''(x) \equiv 0$$

Sostituendo nella prima identità $x=1$ si ottiene:

$$y(1)=0 \Rightarrow 1+\cancel{2y'(1)}+y'(1)-\cancel{2y'(1)}=0 \Rightarrow y'(1)=-1$$

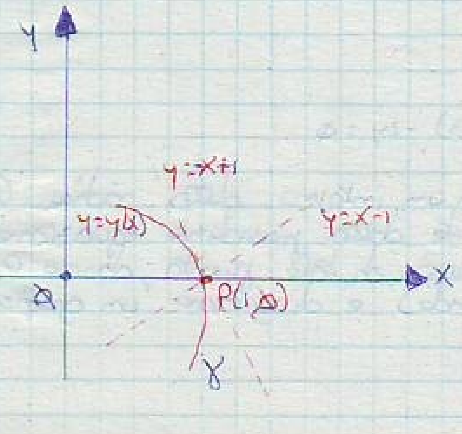
Nella seconda identità si ha:

$$1+\cancel{2y''(1)}-2+y''(1)+4-\cancel{2y''(1)}=0 \Rightarrow y''(1)=-3$$

Quindi i primi termini della serie sono:

$$y(x) = -(x-1) - \tfrac{3}{2}(x-1)^2 + \dots$$

Graficamente si ha:



3) Verificare che l'equazione:

$$x^2+\lambda y^2-2x-y-\operatorname{Sen}(y-yx)=0$$

è univocamente risolubile rispetto a y in un intorno della radice $(x=0, y=0)$, qualunque sia λ. Detta γ la linea avente la precedente equazione ed $y=y(x)$ la funzione definita implicitamente dalla stessa equazione nell'intorno dell'origine, disegnare un grafico approssimato di γ nell'intorno di $x=0$, al variare di λ, e dare uno sviluppo in serie di McLaurin di $y(x)$ arrestato alla derivata terza. Per $\lambda=-\frac{1}{4}$, verificare che il punto $P(1,-2)$ appartiene a γ e scrivere l'equazione della normale a γ in P.

3) Sia:

$$\begin{cases} f(x,y)=x^2+\lambda y^2-2x-y-\operatorname{Sen}(y-yx)=0 \\ f_y(x,y)=2\lambda y-1-(1-x)\cos(x-yx) \end{cases}$$

$f_y(0,0)=-2\neq 0 \Rightarrow$ L'equazione è univocamente risolubile rispetto a y nell'intorno dell'origine

Inoltre essendo $f(x,y)$ una funzione somma di funzioni elementari è analitica e quindi sviluppabile in serie di McLaurin:

$$y(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\dots$$

Calcoliamo $y'(x), y''(x), y'''(x)$

$$y'(x):\ 2x+2\lambda yy'-2-y'-(y'-y-xy')\cos(y-xy)\equiv 0$$

$$\Downarrow$$

$$-2-y'(0)-y'(0)=0 \Rightarrow y'(0)=-1,\ \forall\lambda$$

Tangente: $y=-x$

$$y''(x):\ 2+2\lambda y'^2+2\lambda yy''-y''+(y'-y-xy')^2\operatorname{Sen}(y-xy)-(y''-2y'-xy'')\cos(y-xy)\equiv 0$$

$$\Downarrow$$

$$2+2\lambda-y''(0)-y''(0)-2=0 \Rightarrow y''(0)=\lambda$$

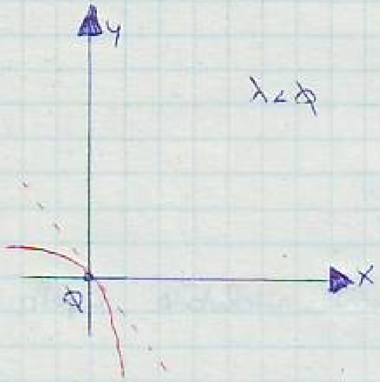
Se $\lambda=0 \Rightarrow y''(0)$ è nullo, per capire l'andamento di λ, studiare $y'''(x)$.
Se $\lambda>0 \Rightarrow$ concavità verso l'alto.
Se $\lambda<0 \Rightarrow$ " verso il basso

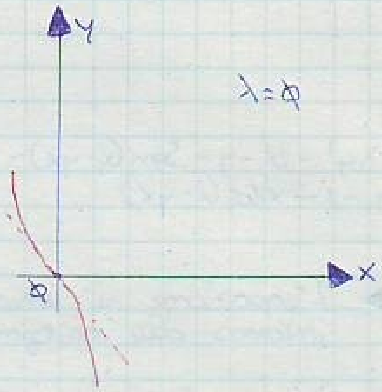
$$y'''(x):\quad 6\lambda y' y'' + 2\lambda y y''' - y''' + (y' - y - xy')^3 \cos(y - xy) - (y''' - 3y'' - xy''') \cos(y - xy)$$
$$+ 3(y'' - 2y' - xy'')(y' - y - xy') \operatorname{Sen}(y - xy) \equiv 0$$

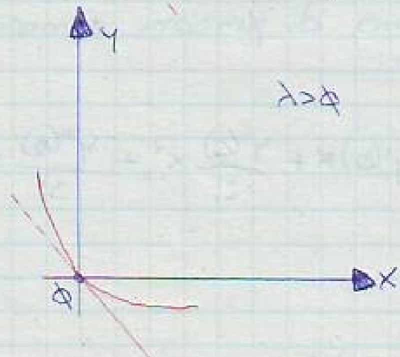
$$\Downarrow$$

$$-6\lambda^2 - y'''(0) - 1 - y'''(0) + 3\lambda = 0 \Rightarrow y'''(0) = \frac{1}{2}(-1 + 3\lambda - 6\lambda^2);$$

Quindi per $\lambda = 0$ risulta $y'''(0) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ flesso discendente.



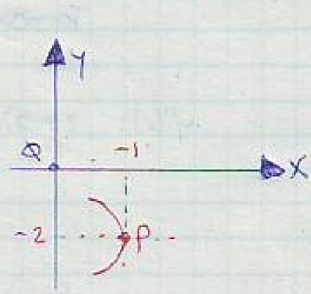




$$y(x) = -x + \frac{\lambda}{2} x^2 + \frac{1}{12}(-1 + 3\lambda - 6\lambda^2) x^3 + \dots$$

Per $\lambda = -\frac{1}{4}$ si ha:

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 - \frac{1}{4} y^2 - 2x - y - \operatorname{Sen}(y - xy) \\ f_y(x,y) = -\frac{1}{2} y - 1 - (1 - x)\cos(y - xy) \\ f_x(x,y) = 2x - 2 + y \cos(y - xy) \end{cases}$$



$f(1,-2) = 0$, $f_y(1,-2) = 0$, $f_x(1,-2) \neq 0 = -2$

Quindi $P(1,-2)$ e' una radice semplice rispetto a x e univocamente risolubile rispetto a x. P e' un punto a tangente verticale con normale parallela all' asse x di equazione:

$$y = -2$$

4) Sia γ la linea di equazione:

$$e^{x+y}-x+y-1=0$$

verificare che γ non ha punti singolari. Determinare gli eventuali punti a tangente orizzontale, precisando se sono di massimo o di minimo, e gli eventuali flessi.

4) Sia:

$$f(x,y)=e^{x+y}-x+y-1$$

Poniamo:

$$\begin{cases} f_x(x,y)=e^{x+y}-1=0 \\ f_y(x,y)=e^{x+y}+1\neq 0 \quad \forall (x,y) \end{cases}$$

Quindi l'equazione è univocamente risolubile rispetto a y, ed inoltre:

$$\begin{cases} f(x,y)=e^{x+y}-x+y-1=0 \\ f_x(x,y)=e^{x+y}-1=0 \end{cases} \Rightarrow e^{x+y}=1 \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow x=-y$$

Quindi:

$$(x=0,\ y=0) \text{ è un punto di tangente orizzontale.}$$

Inoltre la linea γ non ha punti singolari perché $f_y(x,y)\neq 0$. Vediamo la natura di questo punto singolare:

$$y''(0)=-\frac{f_{xx}(0,0)}{f_y(0,0)}=-\frac{1}{2}<0$$

Quindi tale punto è un massimo per γ. Inoltre γ non ha flessi perché:

$$y'''(x)=-\frac{4e^{x+y(x)}}{(e^{x+y(x)}+1)^3}$$

non si annulla mai.

5) Determinare i punti singolari delle linee di equazione:

$$(y-x^2)^2-x^5=0$$

$$x^4+y^4+2x^2y^2-4x^3-4xy^2+3x^2+3y^2=0$$

$$y^5-y^4+x^2=0$$

5) a) Posto: $f(x,y) = (y-x^2)^2 - x^5$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f(x,y) = (y-x^2)^2 - x^5 = 0 \\ f_x(x,y) = -4x(y-x^2) - 5x^4 = 0 \\ f_y(x,y) = 2(y-x^2) = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione è: $(x=0 \; ; \; y=0)$

Dunque l'origine è un punto di singolarità.

Studiamone la natura:

$$f_{xx}(x,y) = -12x^2 - 4y - 20x^3 \quad , \quad f_{xy}(x,y) = -4x \quad , \quad f_{yy}(x,y) = 2$$

Nell'origine si ha:

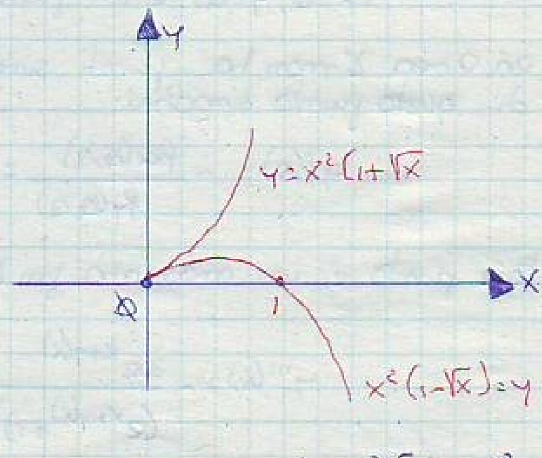
$$f_{xx}(0,0) = 0 , \quad f_{xy}(0,0) = 0 \quad , \quad f_{yy}(x,y) = 2$$

Quindi:

$$2m^2 = 0 \Rightarrow \text{ammette due radici doppie } m = 0 .$$

L'origine è una cuspide:

$$y = x^2 \pm x^2\sqrt{x}$$



b) Posto: $F(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4x^3 - 4xy^2 + 3x^2 + 3y^2 = (x^2+y^2)[(x-2)^2 + y^2 - 1]$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

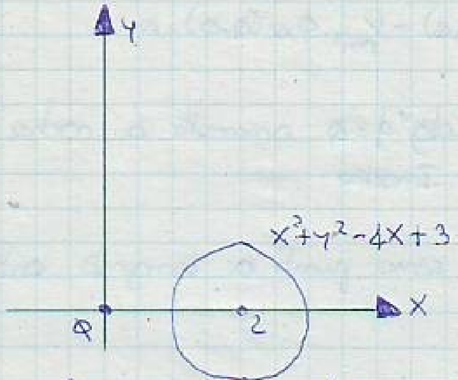
$$x^2+y^2 = 0 \qquad (x-2)^2 + y^2 - 1 = 0$$

Sistema:

$$\begin{cases} F(x,y) = (x^2+y^2)(x^2+y^2-4x+3) = 0 \\ F_x(x,y) = 4(x^2+y^2)(x-1) - 8x^2 + 6x = 0 \\ F_y(x,y) = 4(x^2+y^2)y - 8xy + 6y = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

L'unico punto singolare è l'origine che è un punto doppio isolato.



La circonferenza non ha punti singolari.

L'unica soluzione del precedente sistema è: $(x=0,\ y=0)$. Poi:

$$F_{xx}(x,y) = 12x^2+4y^2-24x+6 \quad , F_{xx}(0,0)=6$$
$$F_{xy}(x,y) = 8y(x-1) \quad , F_{xy}(0,0)=0$$
$$F_{yy}(x,y) = 12y^2+4x^2-8x+6 \quad , F_{yy}(0,0)=6$$

Sostituendo i valori si ottiene:

$$6m^2+6=0$$

Questa equazione non ha radici, e quindi l'origine è un punto isolato.

c) $\phi(x,y) = y^5-y^4+x^2=0 \Rightarrow x^2=y^4-y^5$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x=-y^2\sqrt{1-y} \\ x=+y^2\sqrt{1-y} \end{cases} \quad \text{per } y\leq 1 \text{ reali}$$

Cerchiamo gli eventuali punti singolari:

$$\begin{cases} \phi(x,y) = y^5-y^4+x^2=0 \\ \phi_x(x,y) = 2x=0 \\ \phi_y(x,y) = y^3(5y-4)=0 \end{cases}$$

L'unica soluzione di questo sistema è: $(x=0,\ y=0) \Rightarrow$ unico punto singolare.
Siccome:

$$\phi(0,1)=0$$
$$\phi_x(0,1)=0 \Rightarrow P(0,1) \text{ è un punto a tangente orizzontale.}$$
$$\phi_y(0,1)\neq 0$$

$\phi_{xx}(x,y)=2,\quad \phi_{xy}(x,y)=0,\quad \phi_{yy}(x,y)=20y^3-12y^2$

$$\Downarrow$$