Ora ci chiediamo se, preso un conveniente intorno di $\bar{x}$, esiste un punto $x_1 \in I(\bar{x})$ tale che

$$f(x_1,y)=0$$

ammette ancora una soluzione y_1. In breve ci chiediamo se esiste un valore $y_1 \in I(\bar{y})$ tale che:

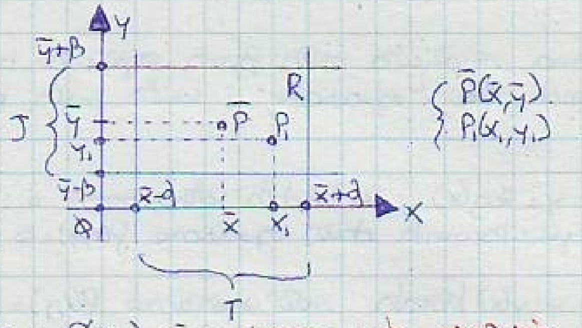
$$\boxed{f(x_1,y_1)=0}$$

Per fare ciò introduciamo il concetto di univoca risolubilità. Prendiamo un rettangolo $R \subset A$ tale che:

$$R=\{\bar{x}-\alpha \le x \le \bar{x}+\alpha,\ \bar{y}-\beta \le y \le \bar{y}+\beta\}$$

R è dunque un intorno rettangolare della radice. Siano poi: $\begin{cases} T=\{\bar{x}-\alpha \le x \le \bar{x}+\alpha\} \\ J=\{\bar{y}-\beta \le y \le \bar{y}+\beta\} \end{cases}$

i corrispondenti intorni di $\bar{x}$ e di $\bar{y}$. Dunque si ha che $R=T\times J$.



Diremo che l'equazione $f(x,y)$ è univocamente risolubile rispetto a y quando $\forall x_1 \in T$ si ha che la $f(x_1,y)=0$ ammette una e una sola soluzione $y_1 \in J$. Chiameremo R il rettangolo di univoca risolubilità. Dunque se ciò avviene si ottiene una

$$y_1=y(x_1) \text{ definita implicitamente dall'equazione } f(x_1,y)=0.$$

Si noti che in R le due equazioni $f(x,y)=0$ e $y-y(x)=0$ sono equivalenti e hanno le stesse radici. Ad esempio supponiamo di avere la seguente equazione:

$$x^2+y^2-1=0$$

Tale equazione è univocamente risolubile rispetto a y in un intorno $I(\bar{P})$ con $\bar{P}(\bar{x},\bar{y})$, quando $\bar{y}\neq 0$. Infatti per:

$$\bar{y}>0 \Rightarrow T=]-1,1[\,,\ J=]0,1[\Rightarrow y(x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$\bar{y}<0 \Rightarrow T=]-1,1[\,,\ J=]-1,0[\Rightarrow y(x)=-\sqrt{1-x^2}$$

$\bar{y}=0 \Rightarrow x=\pm 1$, e viene dunque a mancare l'univoca risolubilità rispetto a y.

Esiste un teorema noto come teorema del Dini il quale afferma che se:

1) L'equazione $z=f(x,y)$ sia continua in un campo A insieme alla derivata $f_y(x,y)$

2) L'equazione abbia in A una radice $(\bar{x},\bar{y})$ tale che: $f(\bar{x},\bar{y})=0$

3) risulti $f_y(\bar{x},\bar{y})\neq 0$

allora esiste un intorno R della radice $(\bar{x},\bar{y})$ nel quale l'equazione $f(x,y)=0$ è univocamente risolubile rispetto a y. Inoltre la funzione trovata $y=y(x)$ risulta continua in T. Si osservi che il teorema del Dini fornisce solo una condizione sufficiente perché l'equazione $f(x,y)=0$ sia univocamente risolubile rispetto a y in un intorno della radice $(\bar{x},\bar{y})$. Ammettendo inoltre che:

4) esista e sia continua in A anche $f_x(x,y)$, allora la $y(x)$ è dotata della derivata $y'(x)$ continua. Dunque:

$$f(x,y)\in C'(A) \Rightarrow y(x)= C'(T)$$

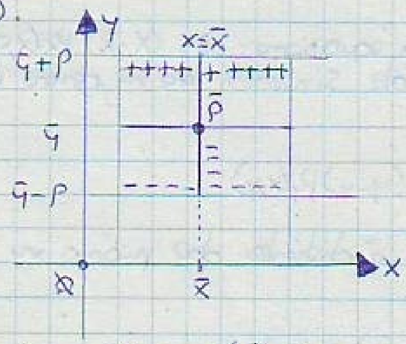
Inoltre si ha che:

$$\boxed{y'(x) = -\frac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))}}$$

Proviamo ora a dimostrare tale teorema. Supponiamo che $f_y(x,y)>0$ e dunque per il teorema della permanenza del segno si ha che sapendo che $f_y(x,y)$ è continua allora esiste un intorno $I(\bar{x},\bar{y})$ nel quale f_y si mantiene maggiore di zero. Se $f_y(x,y)>0$ allora esiste un rettangolo che chiamiamo S, dove f_y si mantiene maggiore di zero.

$$S:\{\bar{y}-\rho\le y\le \bar{y}+\rho\}$$

Posto $x=\bar{x}$, considero $f(\bar{x},y)$.



$\underbrace{f(\bar{x},y)=\varphi(y)}_{\text{funzione solo della } y.}$ e $\varphi'(y)=f_y(\bar{x},y)>0$

Siccome per $\varphi(\bar{y})=f(\bar{x},\bar{y})=0$, allora $\varphi(y)=0$ per $y=\bar{y}$ e $\varphi(y)<0$ per $\bar{y}-\rho\le y\le\bar{y}$ e $\varphi(y)>0$ per $\bar{y}\le y\le\bar{y}+\rho$. Siccome per $\bar{y}-\rho\le y\le\bar{y}$ la $f(\bar{x},\bar{y}-\rho)<0$ allora per il teorema della permanenza del segno si ha che $f(\bar{x},y-\rho)<0$ e esiste un intervallo:

$$T:\{x-q_1\le\bar{x}\le x+q_1\}$$ dove $f(\bar{x},\bar{y}-\rho)$ rimane negativa.

Analogamente si ha per $f(\bar{x},\bar{y}+\rho)$. Sia inoltre:

$$J:\{\bar{y}-\rho\le\bar{y}\le\bar{y}+\rho\}$$ $\Rightarrow$ Ho costruito un rettangolo di univoca risolubilità $R=T\times J$ con $R\subset S$.

Inoltre il teorema del Dini ci fornisce qualcosa in più. Infatti ci dice che $y=y(x)$ è continua in T, cioè:

$$y=y(x)\in C^0(T).$$

Infatti: $\lim_{x\to\bar{x}} y(x)=y(\bar{x}) \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_\varepsilon : \forall x\in \bar{x}-\delta_\varepsilon \vdash\dashv \bar{x}+\delta_\varepsilon$ risulta $|y(x)-y(\bar{x})|<\varepsilon$.

Questa non è altro che la definizione di limite. Qui abbiamo visto la continuità di $y=y(x)$ nel punto $\bar{x}$, ma la stessa cosa vale per tutti gli altri punti $x\in T$. Precedentemente abbiamo detto di aver costruito un rettangolo di univoca risolubilità. Questo è vero perché grazie al teorema degli zeri si ha che:

$$\forall x_1\in T,\ f(x_1,y)=0 \text{ per } J.$$

Più precisamente si prenda un $x_1\in T$ e si consideri la funzione $f(x_1,y)$, dove y descrive l'intervallo J. Essendo $f_y(x,y)>0$, $f(x_1,y)$ risulta strettamente crescente in J e:

$$f(x_1,\bar{y}-\rho)<0 \quad e \quad f(x_1,\bar{y}+\rho)>0$$

Per il teorema degli zeri segue che $\exists y_1\in J$ dove $f(x_1,y_1)=0$, e tale valore è unico visto che $f(x_1,y)$ è strettamente crescente in J. Ecco dimostrata anche l'univoca risolubilità. Analoghe considerazioni valgono per l'univoca risolubilità rispetto a x. In questo caso si otterrà una funzione del tipo:

$$\boxed{x=x(y)}$$

Diamo ora un'interpretazione geometrica del teorema del Dini. Sia $\mathcal{S}$ la superficie di equazione: $z=f(x,y)$. Tale superficie ha, come proiezione ortogonale sul piano xy, il campo A. Nel punto $(\bar{x},\bar{y})$ tale superficie incontra il piano xy.

$$f(\bar{x},\bar{y})=0.$$

Il piano tangente a $\mathcal{S}$ in $(\bar{x},\bar{y},0)$ ha equazione: $Z=(X-\bar{x})f_x(\bar{x},\bar{y})+(Y-\bar{y})f_y(\bar{x},\bar{y})$
dove X,Y,Z sono le correnti coordinate. Si ricordi che in genere l'equazione del piano tangente è la seguente:

$$Z=(X-x)f_x(x,y)+(Y-y)f_y(x,y)$$

Siccome $f_y\neq 0 \Rightarrow$ il piano tangente è distinto dal piano xy, e lo interseca lungo la retta λ di equazione:

$$(X-\bar{x})f_x(\bar{x},\bar{y})+(Y-\bar{y})f_y(\bar{x},\bar{y})=0$$

Il coefficiente di tale retta è $-f_x/f_y$. Dunque per il teorema del Dini si può affermare che la superficie $\mathcal{S}$ interseca il piano xy secondo una linea regolare di equazione $y=y(x)$ passante per il punto $(\bar{x},\bar{y})$ e ivi tangente alla retta λ. Si osservi poi che se $f(x,y)$ è continua in A insieme alle sue derivate parziali prime e seconde, anche $y(x)$ risulta continua in T insieme alle sue derivate $y'(x)$ e $y''(x)$. In genere se $f(x,y)\in C^n(A) \Rightarrow y(x)\in C^n(T)$.
Inoltre sapendo che:

$$y'(x)=-\frac{f_x}{f_y} \Rightarrow y''(x)=\frac{-f_y(f_{xx}+f_{xy}y')-f_x(f_{xy}+f_{yy}y')}{f_y^2}=\frac{-f_{xx}+2f_{xy}y'+f_{yy}y'^2}{f_y}$$

Il teorema del Dini vale anche per le funzioni di più variabili. Si prenda per esempio:

$$u = f(x,y,z)$$

Supponiamo che tale funzione sia definita in A dello spazio (x,y,z) e che l'equazione:

$$f(x,y,z)=0 \quad \text{abbia una radice } (\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \text{ tale che } f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=0.$$

Diremo che l'equazione $f(x,y,z)=0$ è univocamente risolubile rispetto a z, nell'intorno R della radice $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ se, $\forall (x_1,y_1) \in T$, l'equazione $f(x_1,y_1,z)=0$ ammette una e una sola radice z_1 tale che:

$$\boxed{f(x_1,y_1,z_1)=0}$$

Possiamo perciò definire una funzione $z=z(x,y)$ definita implicitamente dall'equazione $f(x,y,z)=0$. In breve:

1) $u=f(x,y,z) \in C^1(A)$ con $f_z \in C^1(A)$

2) $f(x,y,z)$ abbia una radice tale che: $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \Rightarrow f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=0$.

3) $f_z(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \neq 0$

allora l'equazione è univocamente risolubile rispetto a z. Inoltre $z=z(x,y)$ risulta continua in T.

4) Esistono f_x e $f_y \Rightarrow z$ è dotata di z_x e z_y.

Si noti che z, z_x, z_y sono legate da:

$$\begin{cases} z_x = \dfrac{-f_x(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))} \\[2ex] z_y = -\dfrac{f_y(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))} \end{cases}$$

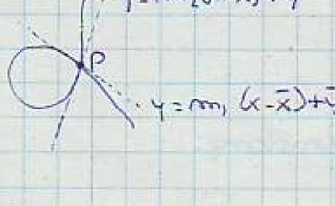
Diamo ora un po' di definizioni. Una radice dove $f(\bar{x},\bar{y})=0$ e $f_y(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$ viene detta radice semplice, mentre una radice dove:

$$\begin{cases} f=0 \\ f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$$, viene detta radice singolare e il relativo punto viene detto punto singolare.

Se in un intorno di un punto singolare, f è dotata di derivate seconde non contemporaneamente nulle e continue in tale punto, allora si può precisare la natura della singolarità del punto. Infatti sia:

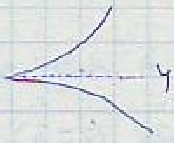
$$m^2 f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) + 2m f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) + f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) = 0$$

Se l'equazione ha due radici m_1 e m_2 reali e distinte diremo che $\bar{P}(\bar{x},\bar{y})$ è un nodo e:



Se $f_{yy}(\bar{x},\bar{y})=0 \Rightarrow$ una delle tangenti ha equazione $x=\bar{x}$

Se l'equazione ha due radici reali e coincidenti, allora il punto P è una cuspide.



$y = m_1(x-\bar{x})+\bar{y}$

Infine nel caso che l'equazione non ha soluzioni, allora il punto P è un punto isolato. Infine sia data una famiglia di linee piane dipendente da un parametro t di equazione:

$$f(x,y,t)=0$$

si chiama inviluppo, una linea λ regolare che: 1) $\forall P \in \lambda$ passa una e una sola linea φ della famiglia F di linee piane.

2) λ e φ hanno la stessa tangente nel punto P.

Per determinare l'equazione di un inviluppo:

$$\begin{cases} f(x,y,t)=0 \\ f_t(x,y,t)=0 \end{cases} \Rightarrow \text{si elimina il parametro } t \text{ per ottenere: } g(x,y)=0.$$

Se $g(x,y)$ contiene derivate parziali prime e non contemporaneamente nulle la g è l'equazione di una linea γ regolare che risulta inviluppo per F. A volte può servire trovare dei punti a tangente orizzontale o verticale. Per calcolare i punti a tangente orizzontale basta:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)\neq 0 \end{cases} \quad \text{in } (\bar{x},\bar{y})$$

mentre per calcolare i punti a tangente verticale basta risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ f_x(x,y)\neq 0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \quad \text{in } (\bar{x},\bar{y}).$$

Vediamo ora qualcosa di più sulle superfici e sul piano tangente. Si consideri l'equazione:

$$f(x,y,z)=0$$

dove $f(x,y,z) \in C^1(A)$, essendo A un campo dello spazio (x,y,z). Sia poi $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ una radice appartenente al campo A della precedente equazione. Supponiamo inoltre che in tale radice non si annullino contemporaneamente le tre derivate f_x, f_y, f_z. Supponiamo che:

$$f_z(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\neq 0$$

Allora sotto tali ipotesi si ottiene in $R = I \times J$ una funzione:

$$z=z(x,y)$$

con $z=z(x,y)\in C^1(T)$, ottenuta risolvendo la precedente equazione rispetto a z. Si noti che:

$$\boxed{z=z(x,y)}$$

è l'equazione di una superficie S spaziale. Il piano tangente in un generico punto P a S è:

$$\boxed{Z-z(x,y)=(X-x)z_x(x,y)+(Y-y)z_y(x,y)}$$

Questa equazione ha senso se $f_z(x,y,z)\neq 0$. Infatti si ricordi che:

$$\begin{cases} z_x=-\dfrac{f_x(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))} \\ z_y=-\dfrac{f_y(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))} \end{cases}$$

Dunque la precedente equazione si può riscrivere:

$$Z-z(x,y)-(X-x)z_x(x,y)-(Y-y)z_y(x,y)$$

Se in un generico punto $P\in S$ si ha:

$$f_x(x,y,z)\neq 0 \text{ e } f_y(x,y,z)\neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{grad } f=\vec{i}f_x(x,y,z)+\vec{j}f_y(x,y,z)+\vec{k}f_z(x,y,z)$$

dove $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sono i versori dei relativi assi cartesiani. Si ricordi che:

$$\text{grad } f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Sia $Q=Q(x,y,z)$ si ha:

$$\boxed{(Q-P)\times \text{Grad } f=0}$$

In alcuni esercizi possono capitare domande del tipo: "cercare eventuali punti a tangente verticale o a tangente orizzontale." Vediamo dunque cosa sono questi punti. Un punto a tangente orizzontale è un punto dove la derivata della funzione rispetto a x è nulla, cioè è un punto a tangente parallela all'asse x.

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ f_x(x,y)=0 \end{cases} \rightarrow \text{Ricerca di punti a tangenza orizzontale.}$$

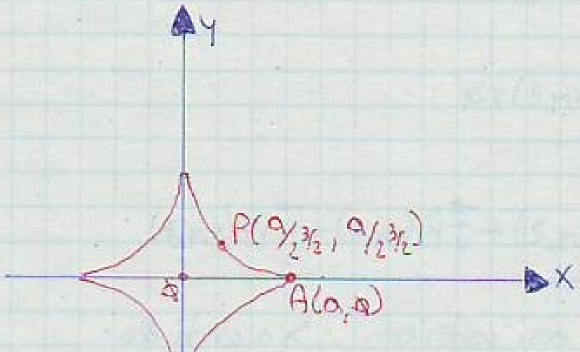
Un punto a tangente verticale invece è un punto dove la derivata della funzione rispetto a y è nulla, cioè è un punto a tangente parallela all'asse y.

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \rightarrow \text{Ricerca di punti a tangenta verticale}$$

*ESERCIZI:

1) Si consideri l'asteroide γ, disegnato in figura, di equazione:

$$f(x,y)=(x^2+y^2-a^2)^3+27a^2x^2y^2=0$$



Verificare che il punto $P(a/2^{3/2}, a/2^{3/2})$ è semplice per γ e scrivere l'equazione della tangente a γ in P. Dire se in un intorno di $A(a,0)$ l'equazione è univocamente risolubile rispetto a x e rispetto a y.

1) ∂