

Se esistono tutti i vari limiti finiti diciamo che la funzione è analitica con tutte le derivate parziali.

Le seguenti condizioni dette **condizioni di omogeneità** sono condizioni necessarie e sufficienti perché la funzione sia analitica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x_1} i = \frac{\partial P}{\partial y_1} \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} i = \frac{\partial P}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial P}{\partial x_m} i = \frac{\partial P}{\partial y_m} \end{array} \right.$$

Diciamo che $P(x,y)$ è analitica come funzione delle variabili complesse x e y quando:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha_1 + i\beta_1 \\ y = \alpha_2 + i\beta_2 \end{array} \right.$$

$\Downarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \alpha_1} i = \frac{\partial P}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial P}{\partial \alpha_2} i = \frac{\partial P}{\partial \beta_2} \end{array} \right. \rightarrow \text{funzione analitica in } x, y.$$

Ad esempio:

$$2x + 3y \Rightarrow 2 \overset{x}{\alpha_1 + i\beta_1} + 3 \overset{y}{\alpha_2 + i\beta_2} \Rightarrow \text{ie } 2\alpha_1 + \beta_1 + 3\alpha_2 + \beta_2$$

La condizione è verificata, e dunque la funzione è analitica.

ESERCIZI DI FUNZIONI ANALITICHE

1) Indicare modulo, argomento, e parte reale di:

- e^{2+3i}
- e^{-4}
- e^{2i}
- e^{-i}
- $e^{\frac{1}{2}i}$
- $e^{\log 2 + \frac{2}{3}\pi i}$
-

$$1) e^{2+3i} \rightarrow z = 2+3i \Rightarrow e^z \Rightarrow e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$



e^2 = Modulo

3 = argomento

$e^2 \cos 3$ = parte reale

$e^2 \sin 3$ = parte immaginaria.

$$2) e^{-4} \rightarrow z = -4 + \phi i \Rightarrow e^{-4} = \text{Modulo}$$

ϕ = argomento.

e^{-4} = parte reale

ϕ = parte immaginaria.

$$3) e^{2i} \rightarrow z = \phi + 2i \Rightarrow e^{\phi} = 1 = \text{Modulo}$$

2 = argomento

$e^{\phi} \cos 2$ = parte reale

$e^{\phi} \sin 2$ = parte immaginaria.

$$4) e^{-i} \rightarrow z = \phi - i \Rightarrow 1 = \text{Modulo}$$

-1 = argomento

$e^{\phi} \cos 1$ = parte reale

$e^{\phi} \sin -1$ = parte immaginaria.

5) $e^{\frac{\pi}{2}i} \rightarrow z = \phi - \frac{\pi}{2}i \rightarrow$ $1 = \text{modulo}$
 $-\frac{\pi}{2} = \text{argomento}$
 $e^{\phi} \cos -\frac{\pi}{2} = \text{parte reale}$
 $e^{\phi} \sin -\frac{\pi}{2}i = \text{parte immaginaria}$

6) $e^{\log 2 + \frac{2}{3}\pi i} \rightarrow z = \log 2 + \frac{2}{3}\pi i \rightarrow$ $\log 2 = \text{modulo}$
 $\frac{2}{3}\pi = \text{argomento}$
 $e^{\log 2} \cos \frac{2}{3}\pi = \text{parte reale}$
 $e^{\log 2} \sin \frac{2}{3}\pi = \text{parte immaginaria}$

2) $e^z = e^{iz}$ con $z = k\pi(-1+i)$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Im R:

$$e^a = e^b \rightarrow a = b$$

Im z:

$$e^a = e^b \rightarrow a = b + 2k\pi i$$

↓

$$e^z = e^{iz} \rightarrow z = iz + 2k\pi i \rightarrow z - iz = 2k\pi i$$

↓

$$z(1-i) = 2k\pi i$$

↓

$$z = \frac{2k\pi i}{(1-i)}$$

3) Luoghi geometrici di:

- $|e^z| = 1$
- $|e^{z^2}| = 1$
- $|e^{z^3}| = 1$

1) $e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{asse } y$

$$2) |e^{z^2}| = 1 \Rightarrow |e^{x^2-y^2}| = 1 \Rightarrow x^2-y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow \pm x = y.$$

$$3) |e^{z^2}| = e^{x^3-3xy^2} = 1 \Rightarrow x^3-3xy^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$x(x^2-3y^2) = 0 \Rightarrow x^2-3y^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$3y^2 = x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3}x^2$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{3}x^2} = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$4) \varphi(z) = \frac{1}{1-iz^2} \in \mathbb{R}$$

Luogo geometrico?

$$1-iz^2 \neq 0 \Rightarrow 1-iz^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow iz^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow z \in \mathbb{R}.$$

$$\downarrow$$

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-e^x(\cos y + i \sin y)} =$$

$$= \frac{1}{1-(e^x \cos y + i e^x \sin y)}$$

$$\downarrow$$

$$e^x \cos y = 0 \Rightarrow \cos y = 0 \quad (\text{angolo} = \frac{\pi}{2})$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{1-(i^2 e^x \sin y)} = \frac{1}{1+e^x \sin y} =$$

$$= \frac{1}{1+0} = \frac{1}{2}$$

Però, si ottiene:

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$5) d = \frac{5+i}{1-i}. \text{ Parte reale, e segno. } \downarrow$$

$$q = e^{\frac{(5+i)(1+i)}{2}} = e^{2+3i} \Rightarrow \text{Reale: } e^2 \cos 3$$

Il risultato è negativo per $\pi/2 < 3 < \pi$.

6) Periodo P di e^{iz} è reale.

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y}$$

$z^g = \rho(\cos g + i \sin g) \Rightarrow g = ?$; un numero complesso è reale se e solo se la parte immaginaria è nulla. Dunque:

$$z = \rho(\cos g + i \sin g) \Rightarrow g = 2\pi$$

$$\downarrow \\ e^{2\pi i} = 1 \Rightarrow \underline{2\pi i = 2\pi}$$

Dunque $P(z) = e^{iz}$ è periodica con periodo $P = 2\pi \in \mathbb{R}$.

7) In forma esponenziale i seguenti numeri:

• $\alpha = 1+i \rightarrow \text{Modulo} = \sqrt{2}$, argomento = $\pi/4$

• $\beta = -1+i\sqrt{3} \rightarrow \text{Modulo} = 2$, argomento = $2/3\pi$

8) Calcolare i seguenti logaritmi:

• $\log(-1+i)$

• $\log(-2)$

• $\log(-i)$

• $\log 3$

• $\log(5mi)$

def: $\log z = \log^* \rho + i(\varphi_0 + 2k\pi)$.

1) $\rho = \sqrt{2}$

$\varphi_0 = 3/4\pi \Rightarrow \log z = \log^* \sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi)$

2) $\rho = 2$, $\varphi_0 = \pi \Rightarrow \log z = \log^* 2 + i(\pi + k2\pi)$.

- $\rho = 1$
 $\theta_0 = -\pi/2 \Rightarrow \log z = \log^* 1 + i(-\pi/2 + 2k\pi).$

- $\rho = 3$
 $\theta_0 = \pi \Rightarrow \log z = \log^* 3 + i(2k\pi).$

- $\rho = \operatorname{Sh} 1$
 $\theta_0 = \pi/2 \Rightarrow \log z = \log^* \operatorname{Sh} 1 + i(\frac{1}{2} + 2k)\pi$

9) Risolvere:

- $z^2 = -1$
- $z^{1/2} = -i$
- $e^{\frac{z}{2}-i} = 4$
- $e^{2z} - 5e^z + 6 = 4$

1) $z = \log(-1) = (1+2m)\pi i$

2) $\frac{1}{2} = \log(-i) = \left(\frac{4m-1}{2}\right)\pi i = \left(\frac{2}{4m-1}\right)\pi i = z.$

3) la funzione esponenziale non si annulla mai.

4) $e^{2z} - 5e^z = -6 \Rightarrow e^z = 2, e^z = 3$



$$\begin{cases} z = \log^* 2 + 2m\pi i \\ z = \log^* 3 + 2m\pi i \end{cases}$$

* FUNZIONI IMPLICITE

Quando noi scriviamo una generica funzione nel seguente modo:

$$y = f(x)$$

noi assegniamo in modo esplicito la dipendenza della variabile y dalla variabile x .
Quando però la funzione la scriviamo nella seguente maniera:

$$f(x, y) = 0$$

allora stabiliamo la dipendenza della variabile y dalla variabile x in modo implicito.
Con ciò possiamo definire **funzioni esplicite** tutte quelle funzioni scritte nella prima forma.
Ad esempio:

$$y = 2x^2 + 1$$

Definiamo invece **funzioni implicite** tutte quelle funzioni scritte nella seconda forma. Ad esempio:

$$e^y - x = 0$$

In genere per passare dalla prima forma implicita alla forma esplicita, bisogna risolvere rispetto a y l'equazione data. Si ricordi che l'equazione è scritta nella forma $f(x, y) = 0$. Per l'esempio precedente si ha:

$$e^y - x = 0 \Rightarrow e^y = x \Rightarrow y = \log(x), \text{ che tradotto alternativamente è: } y = y(x). \text{ Questa è la funzione definita implicitamente dall'equazione } f(x, y) = 0 \text{ (} e^y - x = 0 \text{).}$$

In questo modo sostituendo la $y = y(x)$ trovata nell'equazione $f(x, y) = 0$ si ottiene:

$$f(x, y(x)) = 0, \text{ ricordandosi che questa è un'identità.}$$

Per l'esempio precedente si ha: $e^{\log x} - x = 0 \Rightarrow e^{\log x} = x$. Pensiamo ora per esempio all'equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Tale equazione definisce la funzione a due valori:

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

oppure si deducano le due funzioni ad un solo valore: $y = -\sqrt{1 - x^2}$ e $y = +\sqrt{1 - x^2}$. Si ricordi comunque che può anche succedere che l'equazione $f(x, y) = 0$ non ammetta soluzioni, e che quindi non definisca implicitamente nessuna funzione di x . Ad esempio:

$$e^{x+y} = 0, \text{ non ha soluzioni in quanto un'esponenziale non si annulla mai.}$$

Occupiamoci ora di costruire una funzione $y = y(x)$ definita implicitamente dall'equazione $f(x, y) = 0$ tale che:

$$f(x, y(x)) = 0.$$

Supponiamo per ipotesi che:

- 1) la funzione $z = f(x, y)$ sia definita in un campo A del piano xy .
- 2) L'equazione $f(x, y) = 0$ ammetta in A almeno una radice $(\bar{x}, \bar{y})$. Dunque: $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.