

- 1) $P \pm g$
 - 2) $P \cdot g$
 - 3) P/g
 - 4) $P(g(z))$
- } sono tutte funzioni analitiche.

Abbiamo parlato precedentemente del prolungamento del campo reale al campo complesso. Avere un prolungamento, di una funzione, dal reale al complesso, vuol dire verificare se valgono le stesse regole sostituendo la variabile complessa z alla variabile reale x , e se questa operazione ha un senso. I passi da effettuare per avere un prolungamento del reale al complesso sono:

- 1) Definire una funzione $p(x)$ valida nel campo reale.
- 2) Sostituire formalmente ad x, z , e verificare se la nuova scrittura in z ha significato.
- 3) Studiare le proprietà della nuova funzione ottenuta $p(z)$, che devono essere le stesse del campo reale.

$$p(z) = p(x)$$

Ad esempio:

$y = e^x$. Perché questa funzione non venga per derivazione?
($p = e^x$, $p' = e^x$).

Premoliamo le seguenti limiti:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \text{ Questa funzione è valida in } A, \text{ con } A \in \mathbb{R}.$$

Sostituiamo formalmente ad x , la variabile z :

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

In questo contesto però non siamo sicuri dell'esistenza del limite.
Calcoliamolo:

$$\begin{aligned} e^z &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{iy}{n}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \right\}^n \end{aligned}$$

Per quest'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la forma trigonometrica di un numero complesso.

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \right\}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Siccome $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} e^z &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2} \right)^{n/2}. \quad \underline{\underline{\cos \theta = 1}} \end{aligned}$$

Sapendo che:

$$\theta = \arctan b/a \quad \text{e} \quad b/a = \tan \theta = \frac{y/n}{1 + x/n}$$



$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left((1+tx)^2 + t^2 y^2 \right)^{1/2 t} &= \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2} t \log((1+tx)^2 + t^2 y^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2} \log((1+tx)^2 + t^2 y^2)} = \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \log((1+tx)^2 + t^2 y^2)} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(1+tx)x + 2ty^2}{(1+tx)^2 + t^2 y^2}} = e^{x/2} = e^x \end{aligned}$$

$$\text{Per } \theta \neq 0 \Rightarrow \tan \theta \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\theta}{\tan \theta} \tan \theta = n \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{y/n}{1 + x/n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y}{1 + x/n}.$$

Precedentemente e è stato sostituito m con t dove $t = \frac{1}{m}$. Infatti se $m \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$.

Se $\theta = \phi \Rightarrow \gamma = \phi \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \cos m\theta = \lim_{m \rightarrow \infty} \cos m\phi = \cos \phi$. Infatti se $\theta = \phi$, anche $m\theta = \phi$, e $\cos \phi = 1$.

Dunque siccome $\gamma = \phi \Rightarrow \cos \gamma$.

Riassumendo si ottiene:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho^m (\cos m\theta + i \sin m\theta) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^{R(z)} \left\{ \cos I(z) + i \sin I(z) \right\} = \varphi(z)$$

Verifichiamo ora se $\varphi(z)$ ha le stesse proprietà di $P(x)$. Per effettuare questa operazione procediamo analizzando le proprietà algebriche della funzione e^x .

Proprietà algebriche:

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$$

Siano $\varphi(z_1), \varphi(z_2)$ due funzioni.

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2) = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{x_1+x_2} (\cos y_1 \cos y_2 + i \sin y_2 \cos y_1 + i \sin y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) =$$

$$= e^{x_1+x_2} (\cos (y_1+y_2) + i \sin (y_1+y_2)) = \varphi(z_1+z_2).$$

Dunque le proprietà valgono in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$. Abbiamo visto che e^z può essere scritta nella seguente maniera:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Sapendo che $z = x + iy$, si ottiene:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

La stessa si può descrivere nella seguente maniera: $\downarrow$



$$e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \Rightarrow e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

La formula $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ viene detta **formula di Eulero**.

Siccome, abbiamo visto precedentemente, $y = \phi$, $\theta = \phi \Rightarrow y = \theta$, e dunque:

$$\underline{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta}$$

Dunque un numero complesso z si può rappresentare anche in questa maniera:

$$\boxed{z = x + iy = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}}$$

Questa prima di rappresentazione di un numero complesso viene detta **rappresentazione esponenziale** dello stesso. Questa era un legame tra l'esponenziale e la prima di rappresentazione trigonometrica del numero complesso. Estendiamo ora la definizione data ad altre funzioni analitiche:

$$1) \operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{Sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \varphi(z)$$

$$2) \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{Ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \psi(z)$$

Si noti che $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ godono delle stesse proprietà di $\operatorname{Sh} x$ e $\operatorname{Ch} x$.

Analogamente:

$$\underline{\underline{\operatorname{Tgh} z = \frac{\operatorname{Sh} z}{\operatorname{Ch} z} = \frac{e^z - e^{-z} / 2}{e^z + e^{-z} / 2} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^z - \frac{1}{e^z}}{e^z + \frac{1}{e^z}} = \frac{e^z \cdot e^z - 1}{e^z \cdot e^z + 1} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}}}$$

Anche per le funzioni trigonometriche avviene la medesima cosa:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

Sommando membro a membro si ottiene:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

Anche in questo contesto vale la formula fondamentale della trigonometria:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

Definiamo anche la tangente come:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - 1}{e^{iz} + 1} \cdot \frac{1}{i}$$

Tutte queste funzioni appena descritte prendono il nome di **funzioni elementari**. Tutte le funzioni ottenute da un numero finito di operazioni razionali risultano analitiche e vengono chiamate **funzioni elementari**. Analizziamo ora la funzione logaritmo. In $\mathbb{R}$ essa prende la seguente forma:

$$\log x = y \Rightarrow e^y = x$$

Prenderemo ora un numero complesso $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \log z = w \Rightarrow e^w = z$. Cerchiamo ora di dimostrare questo punto;

Sappiamo che un numero complesso scritto in forma esponenziale ha la seguente sintassi:

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$w = ?$$

Sappiamo che w sia: $w = u + iv$

$$\downarrow$$

$$e^{u+iv} = x + iy = z = \rho e^{i\theta} = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Sapendo che $e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} \Rightarrow e^u \cdot e^{iv} = \rho e^{i\theta}$. Dalle precedenti relazioni si verifica basta che:

$$e^u = \rho \Rightarrow u = \log^* \rho$$

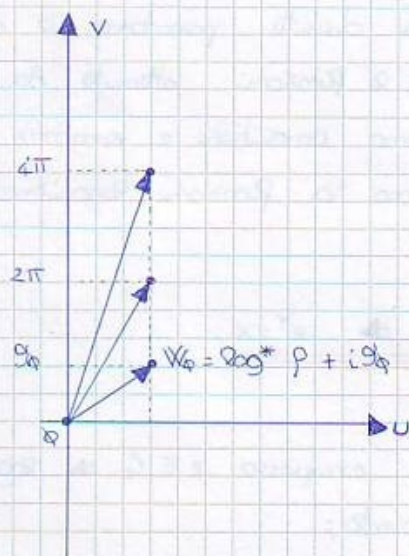
Dunque $e^w = z$ quando $w = \log^* \rho + i\theta$. Tramite quest'ultima formula si può facilmente asserire come θ possa mutare. Più precisamente:

$$\vartheta = \vartheta_0 + 2\pi m, \text{ per } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

In questo modo si ottiene la seguente relazione:

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}^* p + i(\vartheta_0 + 2\pi m)$$

Graficamente si può rappresentare questa relazione nel seguente modo:



Tutte queste possibili combinazioni prendono il nome di **determinazioni**.
Si noti che $\operatorname{Log} z_1 = \operatorname{Log} z_2$ soltanto se $z_1 = z_2$. Dimostriamo questo fatto.
Siano:

$$\begin{cases} z_1 = p_1 e^{i\vartheta_1} \\ z_2 = p_2 e^{i\vartheta_2} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Log}^* p_1 + i\vartheta_1 = \operatorname{Log}^* p_2 + i\vartheta_2$$

$$\text{Se } p_1 = p_2 \Rightarrow \vartheta_1 = \vartheta_2 \Rightarrow z_1 = z_2.$$

Quando l'indice m è uguale a zero, la determinazione prende il nome di **determinazione principale**, ed il rispettivo logaritmo:

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}^* p + i\vartheta_0$$

prende il nome di **logaritmo principale**. Analizziamo ora il segno di z .

Se z è positivo, allora il suo logaritmo principale è reale.

$$\log z = \log * \rho + i(2m+1)\pi.$$

Tutti i logaritmi dei numeri negativi sono perciò complessi.

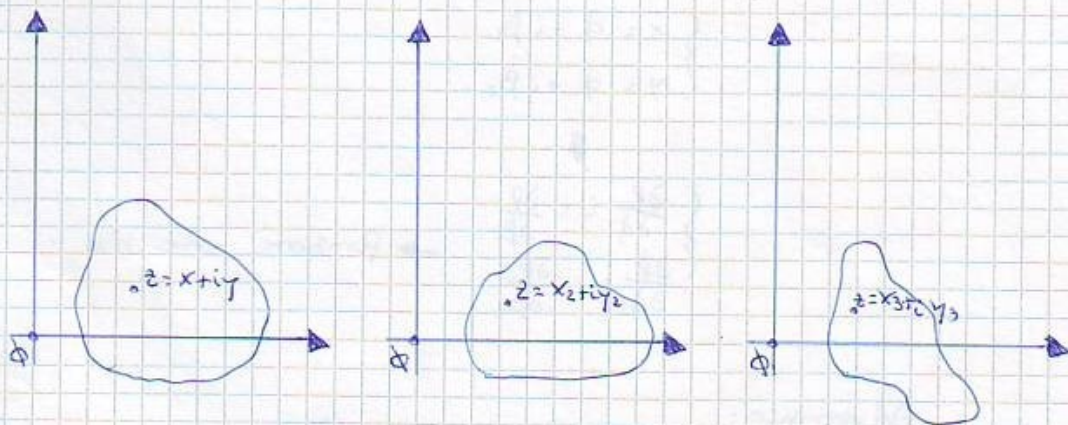
La proprietà fondamentale delle funzioni analitiche è che queste possono essere sviluppate in serie di potenze. Si può dunque utilizzare la formula di Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots$$

Si ricordi infine che:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$$

A



$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_1 + \Delta z, z_2, \dots, z_m) - f(z_1, z_2, \dots, z_m)}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z_1}$$

$\frac{\partial f}{\partial z_1}$ viene detta **derivata parziale nel campo complesso**.