

Le Funzioni analitiche

Abbiamo visto in Analisi I come vengono scritti i numeri complessi.

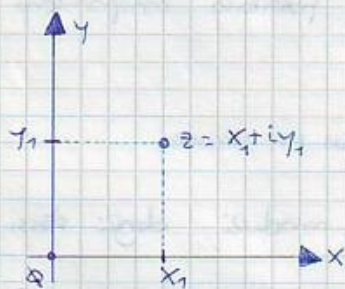
Un numero complesso o un numero che, di solito, viene scritto nella seguente maniera:

$$z = x + iy$$

dove x è la parte detta **parte reale** e iy è la parte detta **parte immaginaria**. L'unità i viene detta **unità immaginaria** ed è suo valore è pari ad un certo valore. Si ricorda soltanto che:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i.$$

Il precedente tipo di rappresentazione di un numero complesso viene detta **rappresentazione algebrica** dello stesso. Di solito un numero complesso viene rappresentato geometricamente su un piano denominato **piano di Gauss**.

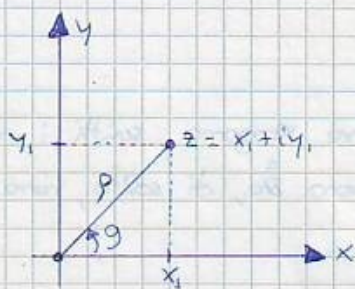


Perciò, ad ogni coppia di valori (x, y) , corrisponde in modo univoco un punto z chiamato numero complesso. Si noti che la distanza di z dall'origine del piano non può essere un valore negativo. Tale distanza che si indica con $|z|$ si calcola nella seguente maniera:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Notando, infine, che $|z|$ forma con l'asse x un angolo θ , si può rappresentare un numero complesso sotto un'altra forma:





dove $p = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Trasformando le coordinate cartesiane in coordinate polari si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = p \cos \theta \\ y_1 = p \sin \theta \end{cases}$$

↓

$$\underline{\underline{z = p \cos \theta + pi \sin \theta = p(\cos \theta + i \sin \theta)}}$$

Questo modo di rappresentare un numero complesso viene detta **rappresentazione trigonometrica di un numero complesso**. Si ricordi che nel campo complesso non è possibile confrontare due numeri complessi. Ad esempio:

$$z_1 = z_2 \rightarrow \text{NON HA SENSO}$$

È possibile solo confrontare i moduli degli stessi. Ad esempio:

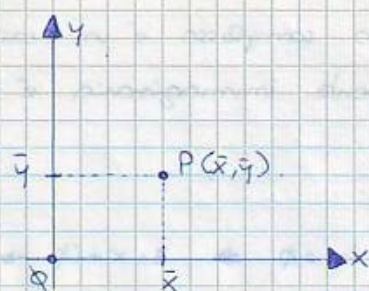
$$|z_1| = |z_2| \rightarrow \text{questa operazione ha senso.}$$

L'introduzione del concetto di funzione analitica avviene grazie all'estensione del concetto di derivata dal campo reale al campo complesso. Prendiamo, ad esempio, la seguente funzione reale:

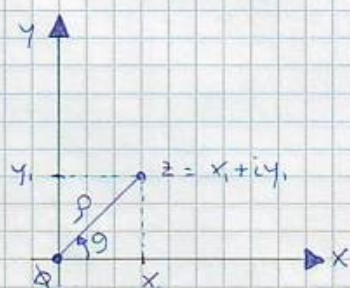
$$w = p(x, y)$$

Sapendo che ogni coppia x, y individua sul piano cartesiano un ben determinato punto P dello stesso, allora la precedente funzione si può riscrivere:

$$w = p(x, y) = p(P).$$



Anche nel piano di Gauss c'è una corrispondenza biunivoca tra le coordinate e il numero complesso.



Altra, utilizzando le relazioni che seguono, si può trovare una relazione fondamentale tra le funzioni reali e le funzioni complesse variabili complesse. Siamo infatti:

$$\begin{cases} x = R(z) \\ y = I(z) \end{cases}$$

dove R è la parte indicata come parte reale di z , mentre I è la parte immaginaria.

Da queste relazioni segue che:

$$w = p(x, y) = p(P) = p(R(z), I(z)) = p(z).$$

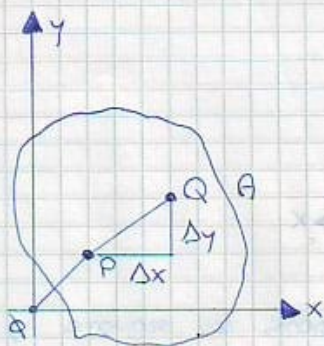
È da notare che, queste funzioni devono essere definite in un insieme A che è un campo complesso. Si ricordi che un **campo** è

Si ricorda anche che il numero complesso è un caso particolare di numero reale. Infatti se la parte immaginaria è nulla, il numero usante è un numero reale.

$$z = x + iy \quad . \quad \text{Se } iy = 0 \Rightarrow z = x + i0 \rightarrow \text{caso particolare di numero reale.}$$

Sioma da due variabili x e y un incremento rispetto Δx e Δy .

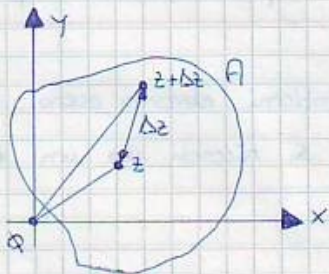
Sia $P(x, y) \in A$ e $Q(x + \Delta x, y + \Delta y) \in A$. Cioè il nuovo punto trovato, incrementando le due variabili, appartenga ancora al campo A .



Analogamente visto da $P(P) = P(z)$, allora si ha:

$$P(Q) = P(z + \Delta z)$$

Graficamente si ottiene:



dove Δz è l'incremento del numero complesso z .

Per essere più precisi si ha:

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Analogamente la funzione corrispondente avrà le seguenti incrementi: ↴

$$\Delta P = (P(z + \Delta z) - P(z)).$$

Tale incremento può essere riscritto nella seguente maniera:

$$\Delta P = P(z + \Delta z) - P(z) = P(x + \Delta x, y + \Delta y) - P(x, y) = P(Q) - P(P).$$

Il rapporto:

$$\frac{\Delta P}{\Delta z} = \frac{P(z + \Delta z) - P(z)}{\Delta z}$$

viene detto **rapporto incrementale complesso**, ed il limite di tale rapporto per $\Delta z \rightarrow 0$ viene definito **derivata complessa**.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P(z + \Delta z) - P(z)}{\Delta z} = P'(z).$$

Cio significa che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall \delta < |\Delta z| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{P(z + \Delta z) - P(z)}{\Delta z} - P'(z) \right| < \varepsilon.$$

Da tutto ciò è possibile notare che la funzione P deve essere continua insieme alle sue derivate nel campo A . Una funzione $P(z)$ dotata della derivata complessa nel campo A si dice **funzione analitica**.

Ad esempio:

$$W = x^m \quad \text{con } m > 0$$

Sostituendo la variabile reale x con la variabile complessa $z = x + iy$, effettuiamo un prolungamento dall'asse reale al piano complesso, come vedremo successivamente.

$$W = x^m = (x + iy)^m = z^m = P(z) = P(x, y).$$

La condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia analitica,

è che:

$$P_x i = P_y$$

Dimostriamo quest'ultima relazione. Sia $P(z) = P(x, y)$ una funzione analitica. Dando a z un incremento reale ($\Delta y = 0$, $\Delta z = \Delta x$) si ottiene:

$$P'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P(z + \Delta z) - P(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x, y) - P(x, y)}{\Delta x} = P_x(x, y)$$

Analogamente, dando a z un incremento immaginario ($\Delta z = i \Delta y$) si ottiene:

$$P'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P(z + \Delta z) - P(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(x, y + \Delta y) - P(x, y)}{i \Delta y} = \frac{1}{i} P_y(x, y)$$

Alora, ora, fine si ha:

$$P'(z) = P_x(x, y) = \frac{1}{i} P_y(x, y) \Rightarrow P_x(x, y) i = P_y(x, y)$$

Quest'ultima dimostrazione è stata fatta utilizzando le funzioni a due variabili, ma la stessa non nulla per le funzioni ad una sola variabile. Per l'esempio precedente si ha:

$$\frac{\Delta P}{\Delta z} = \frac{P(z + \Delta z) - P(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)^m - z^m}{\Delta z} = m z^{m-1} + \binom{m}{2} z^{m-2} \Delta z + \dots$$

Per $\Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow P'(z) = m z^{m-1}$, che è la corrispondente derivata complessa. Dunque:

$$\begin{cases} P_x(z) = \dots \\ P_y(z) = \dots \end{cases} \Rightarrow P_x = \frac{1}{i} P_y \Rightarrow \text{la funzione è analitica.}$$

Si nota inoltre che la derivata complessa della funzione analitica coincide sempre con P_x . Dimostriamo quest'ultimo punto:

Diamo a z un incremento arbitrario $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Sapendo che $f(z) = f(x, y)$ è differenziabile, si ottiene:

$$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + W(\Delta x, \Delta y).$$

Sapendo che:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|W(\Delta x, \Delta y)|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{W}{\Delta z} \right| = 0$$

↓

$$\Delta f = f_x(x, y)(\Delta x + i\Delta y) + W = f_x(x, y)\Delta x + W$$

Prendiamo ora il seguente numero complesso:

$$z = x + iy$$

Chiamiamo $U(x, y)$ la parte reale del numero, mentre sia $V(x, y)$ la variabile y . Dunque:

$$\begin{cases} U(x, y) = x \\ V(x, y) = y \end{cases} \Rightarrow \underline{f(z) = z = U(x, y) + iV(x, y)}$$

La condizione necessaria e sufficiente perché una funzione sia analitica la possiamo riscrivere nella seguente maniera:

$$i(U_x + iV_x) = U_y + iV_y \Rightarrow U_x = V_y, \quad V_x = -U_y$$

Queste equazioni vengono dette equazioni differenziali a derivata parziale. Come si nota, la scrittura cambia, ma il senso delle equazioni resta lo stesso. Infine, anche alle funzioni analitiche si estendono tutte le regole di derivazione già conosciute. Infatti se f e g sono due funzioni analitiche, allora anche:

↓