$$\begin{cases} z_x = 2(x-y) + y\,\text{sen}\,xy = 0 \\ z_y = -2(x-y) + x\,\text{sen}\,xy = 0 \end{cases} \Rightarrow 2(x^2-y^2) = 0 \Rightarrow x = \pm y$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = y \\ x\,\text{sen}\,x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = m\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{m\pi} \\ y = \pm\sqrt{m\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ 4x + x\,\text{sen}\,x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x(4 + \text{sen}\,x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Soluzioni del sistema:

$$(x = \pm\sqrt{m\pi},\ \pm\sqrt{m\pi} = y)$$

i relativi punti: $P(\sqrt{m\pi}, \sqrt{m\pi})$, $Q(-\sqrt{m\pi}, -\sqrt{m\pi})$ sono punti di stazionarietà.
Quindi:

$$z_{xx} = 2 + y^2\cos xy,\quad z_{xy} = -2 + \text{sen}\,xy + xy\cos xy,\quad z_{yy} = 2 + x^2\cos xy$$

$$\Downarrow$$

$$H(P_m) = H(Q_m) = \begin{vmatrix} 2 + m\pi\cos m\pi & -2 + m\pi\cos m\pi \\ -2 + m\pi\cos m\pi & 2 + m\pi\cos m\pi \end{vmatrix} = 8(-1)^m m\pi.$$

Per m pari, $H(x,y) > 0$ con $z_{xx} > 0$ e quindi P e Q sono punti di minimo relativo.
Per m dispari si ha che $H(x,y) < 0$ e quindi non ci sono massimi e minimi relativi.
Per $m = 0$ si ha:

$$H(x,y) = 0 \rightarrow \text{Punto parabolico.}$$

Si osservi però che:

$$z(x,y) - z(0,0) = (x-y)^2 - \cos xy + 1 = (x-y)^2 + (1 - \cos xy) \geq 0 \quad \forall x,y.$$

Quindi l'origine è un punto di minimo relativo.

3) Determinare i punti di massimo relativo libero per la funzione:

$$z(x,y) = y^2x - y^4 - x^3 + x^2y^2.$$

3) $\begin{cases} z_x = y^2 - 3x^2 + 2xy^2 = 0 \\ z_y = 2xy - 4y^3 + 2x^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 3x^2 + 2xy^2 = 0 \\ y(2x - 4y^2 + 2x^2) = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$y = 0$ oppure $2x - 4y^2 + 2x^2 = 0$

$\Downarrow$

$y^2 = \frac{1}{2}x(1+x)$

Sostituendo si ha:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ oppure: $\begin{cases} y^2(1+2x) - 3x^2 = 0 \\ y^2 = \frac{1}{2}x(1+x) \end{cases} \Rightarrow x\frac{1+x}{2} = \frac{3x^2}{1+2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}, \quad y = \begin{cases} \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \pm 1 \end{cases} \end{cases}$

Radici del sistema:

$(0,0);\ \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right);\ (1, \pm 1)$

Sia:

$z_{xx} = -6x + 2y^2, \quad z_{xy} = 2y + 4xy, \quad z_{yy} = 2x - 12y^2 + 2x^2$

$\Downarrow$

$H\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = \begin{vmatrix} -9/4 & \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -3 \end{vmatrix} = 3/4 > 0$ con $z_{xx} < 0 \Rightarrow$ Max relativo.

$H\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = \begin{vmatrix} -9/4 & -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -3 \end{vmatrix} = 3/4 > 0$ con $z_{xx} < 0 \Rightarrow$ Max relativo

$H(1,1) = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow$ ne Max ne Min

$$H(1,-1) = \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = -4 < \emptyset \Rightarrow \text{ né Max né Min.}$$

Nell'origine $H(\emptyset,\emptyset)=\emptyset$ e si ha punti parabolici. Consideriamo però l'intersezione della superficie con l'asse delle y.

$$z(x,\emptyset) = -x^3$$

$$\Downarrow$$

In un intorno dell'origine cadono infiniti punto della semiretta $y=\emptyset, x<\emptyset$ tali che:

$$z(x,\emptyset) - z(\emptyset,\emptyset) > \emptyset$$

e analogamente esistono infiniti punti tali che:

$$z(x,\emptyset) - z(\emptyset,\emptyset) < \emptyset \qquad \text{con } (\underbrace{y=\emptyset, x>\emptyset}_{\text{retta}})$$

Dunque l'origine non è né un max né un min relativo.

4) Fra i vettori:

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

aventi somma delle componenti costante $(x+y+z=K)$, determinare quello di modulo minimo.

4) $z = K-(x+y)$

$$|\vec{V}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+(K-x-y)^2} = \left(x^2+y^2+(K-x-y)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(x^2+y^2+K^2+x^2+y^2-2Kx-2Ky\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{f(x,y)} = \left(2x^2+2y^2+2K^2-2Kx-2Ky+2xy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} f_x = 4x+2y-2K = \emptyset \\ f_y = 4y+2x-2K = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-K=\emptyset \\ x = K-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = K/3 \\ y = K/3 \end{cases} \Rightarrow H(K/3, K/3) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > \emptyset$$

Siccome $f_{xx}>0$ il punto $P(k/3, k/3)$ è un minimo relativo e dunque:

$$\vec{V} = \frac{k}{3}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

è il vettore cercato.

[illegible]

5) Determinare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo vincolato della funzione $f(x,y)=xy$ con la condizione:

$$3x^5+5y^3-8=0$$

5) Posto: $\omega = f(x,y)+\lambda(\phi(x,y))$ con $\phi(x,y)=3x^5+5y^3-8$

$$\Downarrow$$

$$\omega = xy+\lambda(3x^5+5y^3-8)$$

$$\begin{cases} \omega_x = y+15\lambda x^4 = 0 \\ \omega_y = x+15\lambda y^2 = 0 \\ 3x^5+5y^3-8=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Sol: } x=1,\ y=1,\ \lambda=-\frac{1}{15}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{\omega} = xy-\frac{1}{15}(3x^5+5y^3-8)$$

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} -4x^3 & 1 \\ 1 & -2y \end{vmatrix} = 8x^3y-1 \Rightarrow H(1,1,-\tfrac{1}{15})>0 \text{ con } \omega_{xx}<0$$

$$\Downarrow$$

$P(1,1)$ è un massimo relativo vincolato.

6) Determinare i massimi e i minimi relativi vincolati della funzione $z=x+y-\frac{1}{2}$ con la condizione $3x^2+3y^2-2xy-3x+y-\frac{1}{4}=0$.

6) Posto:

$$\begin{cases} W_x = 1 + 6\lambda x - 2\lambda y - 3\lambda = 0 \\ W_y = 1 + 6\lambda y - 2\lambda x + \lambda = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 3x + y - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \quad \text{con } W = x + y - \frac{1}{2} + \lambda\left(3x^2 + 3y^2 - 2xy - 3x + y - \frac{1}{4}\right).$$

$$\Downarrow$$

Sol: $\left(x = 0,\ y = -\frac{1}{2},\ \lambda = \frac{1}{2}\right)$, $\left(x = 1,\ y = \frac{1}{2},\ \lambda = -\frac{1}{2}\right)$

In corrispondenza di queste soluzioni si ha:

$$H\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0 \quad \text{con } W_{xx} > 0 = 3 \Rightarrow \text{Min relativo vincolato.}$$

$$H\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8 > 0 \quad \text{con } W_{xx} = -3 < 0 \Rightarrow \text{Max relativo vincolato.}$$

7) Determinare i massimi e i minimi relativi vincolati della funzione $z = xy$ con la condizione di vincolo:

$$\phi(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$$

7) $W = xy + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 1)$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} W_x = y + 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ W_y = x + 2\lambda y + \lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Sol: } \left(x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \lambda = -\frac{1}{3}\right), (x = \pm 1, y = \mp 1, \lambda = 1)$$

Quindi:

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) \\ 1 - \frac{2}{3} & -2\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Punto parabolico.}$$

Si osservi però che

$$\bar{\omega}(x,y) = \frac{2}{3}xy - \frac{1}{3}(x^2+y^2-1) = \frac{1}{3}\left(1-(x-y)^2\right) \le \frac{1}{3} \quad \forall (x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}$$

con $w_{xx}<0$, e quindi il punto $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ è un massimo relativo.

$$H(1,-1,1) = 0 \rightarrow \text{Punto parabolico}$$

Si osservi però che:

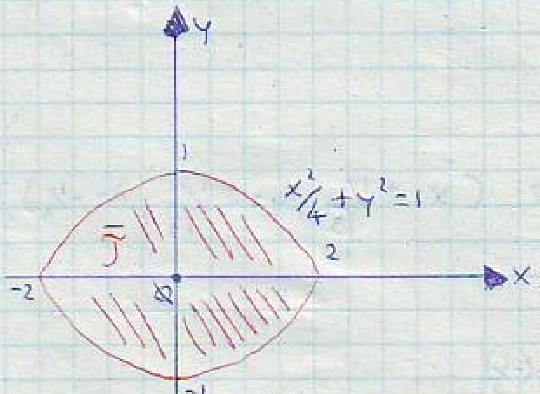
$$\hat{\omega}(x,y) = xy + (x^2+y^2+xy-1) \quad e \quad \tilde{\omega}(x,y) = (x+y)^2 - 1 \ge -1 \quad \forall (x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{\omega}(x,y) = -1$$

Il punto $P(1,-1)$ è un minimo relativo. Siccome $z(x,y) = z(-x,-y)$ e $\phi(x,y) = \phi(-x,-y)$ analoghe considerazioni valgono per $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $(-1,1)$.

8) Determinare il massimo e il minimo della funzione $z(x,y) = x^3 - xy^2 - x$, nel dominio $\bar{J} = \left(\frac{x^2}{4} + y^2 \le 1\right)$.



3)

Cerchiamo i punti di massimo e di minimo relativi liberi della funzione $z(x,y)$, che siano interni a J.

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ z_y = -2xy = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Sol: $\left(x = \frac{1}{\sqrt{3}}, y = 0\right), \left(x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, y = 0\right)$

I punti $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ e $P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ sono interni al dominio J, ma non sono né di massimo né di minimo relativo. Infatti:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} = -4(3x^2 + y^2)$$

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = H\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = -4 < 0$$

Però la funzione $z(x,y)$ è continua in J e quindi, per il teorema di Weierstrass, è in dotata di massimo e di minimo. Dunque questi devono appartenere alla frontiera, di equazione:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$$

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange non produce nessun risultato. Però con la condizione:

$$z = x^2 + y^2 - 3x - y + 3 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow z(x, y(x)) = x^3 - x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = x\left(\frac{5}{4}x^2 - 2\right) = z_1(x)$$

$z_1(x)$ va studiata tra:

$$-2 \leq x \leq 2.$$

Calcoliamo $z_1'(x)$:

$$z_1'(x) = \frac{15}{4}x^2 - 2 = 0 \quad \text{per } x = \pm 2\sqrt{\frac{2}{15}}$$

Siccome:

$$\begin{cases} z_1''(x) > \phi & \text{per } x = 2\sqrt{\frac{2}{15}} \\ z_1''(x) < \phi & \text{per } x = -2\sqrt{\frac{2}{15}} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$x = 2\sqrt{\frac{2}{15}}$ e $x = -2\sqrt{\frac{2}{15}}$ sono rispettivamente il minimo e il massimo relativo per $z_1(x)$.

Però:

$$\begin{cases} z_1(-2) = -6 < z_1\left(2\sqrt{\frac{2}{15}}\right) = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{15}} \\ z_1(2) = 6 > z_1\left(-2\sqrt{\frac{2}{15}}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{15}} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$x = \mp 2$ sono i punti di minimo e massimo (assoluti) per $z_1(x)$.