Tra le funzioni omogenee troviamo quelle di secondo grado che possono essere:

$$\boxed{\sum_{1}^{m}{}_{J,L,K}\; a_{JK}\, x_J\, x_K}$$

queste sono le forme quadratiche. Ad esempio:

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

è una generica forma quadratica (rappresentazione algebrica). Sappiamo che presa una matrice quadrata del tipo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

si chiama discriminante il determinante della matrice.

$$\boxed{\Delta = ad - cb.}$$

Una forma quadratica può essere di tre tipi:

1) Definita
2) Semidefinita
3) Indeterminata (Indefinita).

Una forma quadratica si dice definita quando risulta definita in ogni punto diverso dall'origine, si dice semidefinita quando si può annullare per punti differenti dall'origine, e si dice indefinita quando oscilla. In breve:

FORMA DEFINITA
- Positiva → $f(x,y) > 0 \quad \forall x,y \neq 0$
- Negativa → $f(x,y) < 0 \quad \forall x,y \neq 0$

FORMA SEMIDEFINITA
- Positiva → $f(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \neq 0$
- Negativa → $f(x,y) \leq 0 \quad \forall x,y \neq 0$

FORMA INDEFINITA
- $f(x,y) > 0$
- $f(x,y) < 0$

Il discriminante serve per studiare il carattere della forma quadratica. Infatti se Δ è tale che:

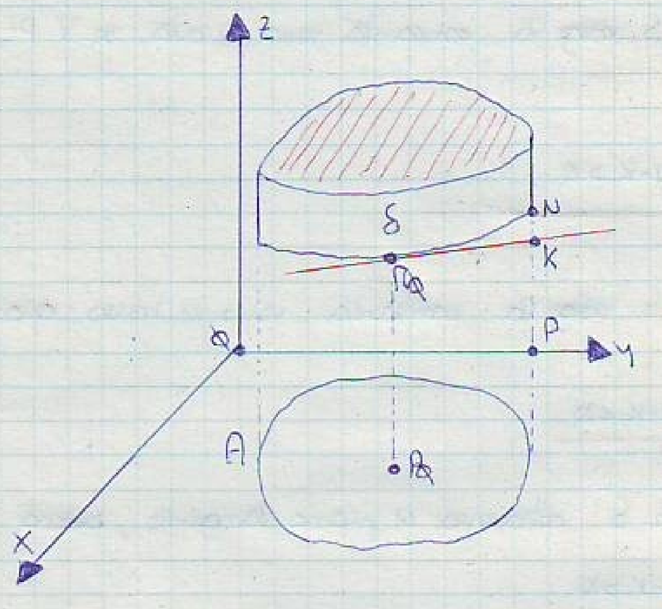
$\Delta > 0 \Rightarrow$ Forma definita: Positiva $a \circ d > 0$; Negativa $a \circ d < 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ Forma semidefinita: Positiva $a > 0$; Negativa $a < 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ Forma indefinita: $f(x,y) > 0$, $f(x,y) < 0$ $\Big\} \forall x,y$

Ora riprendiamo in esame la precedente superficie S di equazione $z = f(x,y)$.

$z = f(x,y) \in C^2(A)$



Sia Π_0 di coordinate $\Pi_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ un punto e $P_0(x_0,y_0)$ la sua proiezione sul piano xy. Diamo ora l'equazione del piano tangente:

$$z = f(x_0,y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = F(x,y)$$

dove x, y sono le coordinate del punto P. Scriviamo ora la differenza $N-K$:

$$N - K = f(x,y) - F(x,y)$$

Utilizzando lo sviluppo di Taylor si ha:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial^2 x}(x-x_0)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial (x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 (x_0,y_0)}{\partial^2 y}(y-y_0)^2\right)$$

Dunque:

$$N-K = f(x,y) - F(x,y) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 (x_0,y_0)}{\partial^2 x}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 (x_0,y_0)}{\partial^2 y}(y-y_0)^2\right] + R^2(x,y)$$

Nel punto P_0 la superficie S volge la concavità verso l'alto, se $\forall P \in I(P_0)$ con $P \neq P_0$ si ha:

$$\Delta(x,y) = N-K > 0$$

Nel punto P_0 la superficie S volge la concavità verso il basso quando $\forall P \in I(P_0)$ con $P \neq P_0$ si ha:

$$\Delta(x,y) = N-K < 0$$

Infine se in P_0 la superficie S attraversa il piano tangente, allora si ha:

- $\Delta(x,y) = N-K > 0$
- $\Delta(x,y) = N-K < 0$

Dunque se P_0 è un punto ellittico, S non è attraversata dalla tangente, se P_0 è un punto iperbolico S è attraversata dalla tangente, mentre se P_0 è un punto parabolico, non si sa nulla. Dunque possiamo dire che P_0 è un punto di massimo relativo se esiste un intorno del punto P_0 ($I(P_0)$) tale che:

$$f(P) \leq f(P_0) \quad , \forall P \in I(P_0)$$

Analogamente P_0 è un punto di minimo relativo se:

$$f(P) \geq f(P_0) \quad , \forall P \in I(P_0)$$

La condizione necessaria perché un punto sia di massimo o di minimo relativo è che:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Punti di stazionarietà}$$

$\Downarrow$

In tal caso la tangente è parallela al piano xy.

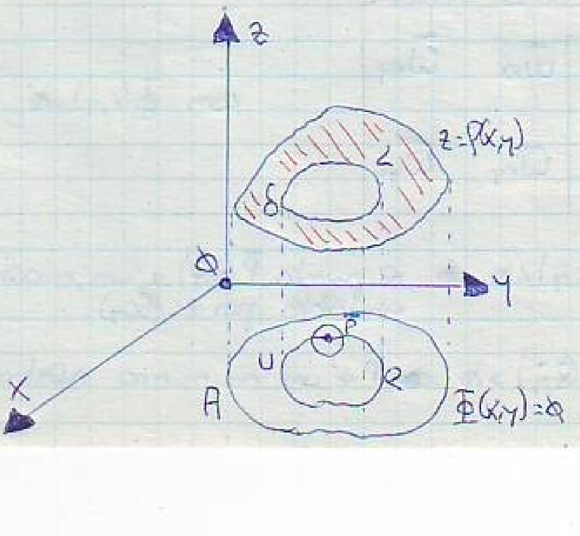
Dopo di che si studia il determinante Hessiano. Se esso è negativo non esistono né punti di massimo né punti di minimo. Se esso è nullo, bisogna effettuare un ulteriore studio. Detto P_0 uno di questi punti, si esamina la differenza:

$$\boxed{f(P) - f(P_0)}$$

dove P è un generico punto appartenente all'intorno di P_0. Se tale differenza è maggiore o uguale a zero, P_0 è un minimo relativo, altrimenti è un massimo relativo. Infine se il determinante Hessiano è maggiore di zero si ha:

- se $f_{xx}(x,y) \geq 0 \Rightarrow$ minimo relativo.
- se $f_{xx}(x,y) \leq 0 \Rightarrow$ massimo relativo

Sia ora $z = f(x,y)$ l'equazione di una superficie così fatta:



Sia inoltre $\Phi(x,y)=0$ e' equazione di vincolo, cioè e' equazione che genera la condizione di vincolo. Si suppongono:

$$f, \Phi \in C^2(A)$$

e siano Φ_x e Φ_y non contemporaneamente nulle. L'equazione $\Phi(x,y)=0$ e' l'equazione di una linea regolare ℓ. Indicando con L la sua "proiezione" sulla superficie S, si ha che posto $(\bar{x},\bar{y})$ come radice della precedente equazione, il punto $\bar{P}(\bar{x},\bar{y}) \in \ell$ e' di massimo relativo vincolato per $z=f(x,y)$ se esiste un intorno U di $\bar{P}$ dove:

$$f(P) \leq f(\bar{P}) \quad , \forall P \in U \cap \ell$$

Analogamente $\bar{P}$ e' un punto di minimo relativo vincolato se:

$$f(P) \geq f(\bar{P}) \quad , \forall P \in \ell \cap U$$

Per calcolare questi punti vincolati si usa il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Questo funziona così; Posto:

$$\omega(x,y) = f(x,y) + \lambda \Phi(x,y) \Rightarrow \begin{cases} \omega_x = f_x(x,y) + \lambda \Phi_x(x,y) = 0 \\ \omega_y = f_y(x,y) + \lambda \Phi_y(x,y) = 0 \\ \Phi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Siano $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}$ le soluzioni di questo sistema, si considera la superficie $\bar{S}$ di equazione:

$$\bar{\omega} = f(x,y) + \bar{\lambda} \Phi(x,y)$$

e si calcola il suo determinante Hessiano:

$$H(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) = \begin{vmatrix} \bar{\omega}_{xx} & \bar{\omega}_{xy} \\ \bar{\omega}_{xy} & \bar{\omega}_{yy} \end{vmatrix} \quad \text{con } \Phi(x,y)=0$$

Se $H(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) > 0$ con $\bar{\omega}_{xx}(\bar{x},\bar{y}) < 0 \Rightarrow$ il punto $\bar{P}(\bar{x},\bar{y})$ e' un massimo relativo vincolato per $z=f(x,y)$.

Se $H(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) > 0$ con $\bar{\omega}_{xx}(\bar{x},\bar{y}) > 0 \Rightarrow \bar{P}$ e' un minimo relativo vincolato.

Infine se:

$$H(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) = 0 \Rightarrow \text{caso di indecisione.}$$

Sia ora A un campo del piano (x,y) e sia $\bar{D} = D \cup FD \subset A$ un dominio limitato ed interno ad A, la cui frontiera FD sia rappresentabile mediante la seguente equazione:

$$\boxed{\Phi(x,y) = 0}$$

con $\Phi(x,y) \in C^2(A)$ e $\bar{\Phi}_x^2 + \bar{\Phi}_y^2 > 0$. Indichiamo con $f(x,y)$ una funzione $\in C^2(A)$, continua in $\bar{D}$ e, per il teorema di Weierstrass, dotata di massimo assoluto e minimo assoluto. Indicheremo con:

$$\begin{cases} M = \text{massimo assoluto.} \\ m = \text{minimo assoluto.} \end{cases}$$

Dunque per trovare il massimo o il minimo assoluto bisogna trovare i massimi e i minimi relativi liberi e vincolati, e successivamente confrontarli. Più precisamente sia:

$$\begin{cases} M = f(\bar{P}) & \text{con } f(\bar{P}) \geq f(P), \ \forall P \in \bar{D} \\ m = f(\hat{P}) & \text{con } f(\hat{P}) \leq f(P), \ \forall P \in \bar{D} \end{cases}$$

Se $\bar{P} \in D$ esso è o un massimo o un minimo relativo, altrimenti se $\bar{P} \in FD$ esso è o un massimo o un minimo relativo vincolato. Pertanto per trovare $\bar{P}$ bisogna trovare sia i massimi e i minimi relativi liberi sia quelli vincolati. $\bar{P}$ è il punto dove $f(P)$ assume valore maggiore. Analogamente per $\hat{P}$.

* ESERCIZI:

1) Precisare la natura dei punti delle seguenti superfici:

$$z = y^2 + 6x^2 + x^4 \ , \ z = x^6 - y^4 + xy \ , \ z = 3x^2 - 6xy + y^3 .$$

1) a) $z = y^2 + 6x^2 + x^4 \rightarrow \begin{cases} z_x = 12x + 4x^3 = 0 \\ z_y = 2y = 0 \end{cases}$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 12(1+x^2) & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(12+12x^2) = 24+24x^2 = 24(1+x^2)$$

$$\begin{cases} z_{xx} = 12+12x^2 \\ z_{xy} = 0 \\ z_{yy} = 2 \end{cases}$$

Siccome $z_{xx} > 0$ $\forall x,y$, si ha che $P(x,y)$ è un punto ellittico.

b) $z = x^6 - y^4 + xy \Rightarrow \begin{cases} z_x = 6x^5 + y \\ z_y = -4y^3 + x \end{cases}$, $z_{xx} = 30x^4$, $z_{xy} = 1$, $z_{yy} = -12y^2$

$\Downarrow$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30x^4 & 1 \\ 1 & -12y^2 \end{vmatrix} = -360x^4y^2 - 1 < 0 \quad \forall x,y.$$

Quindi: $P(x,y)$ è un punto iperbolico.

c) $z = 3x^2 - 6xy + y^3 \Rightarrow \begin{cases} z_x = 6x - 6y \\ z_y = -6x + 3y^2 \\ z_{xx} = -6 \\ z_{yy} = 6y \end{cases}$, $z_{xy} = -6$

$\Downarrow$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 6y \end{vmatrix} = +36(y-1)$$

Per $y = 1$ i punti sono parabolici, per $y > 1$ i punti sono ellittici per $y < 1$ i punti sono iperbolici.

2) Determinare i punti di e di minimo relativo e/o bene per la funzione:

$$z(x,y) = (x-y)^2 - \cos xy$$

2) Consideriamo il sistema:

$\Downarrow$