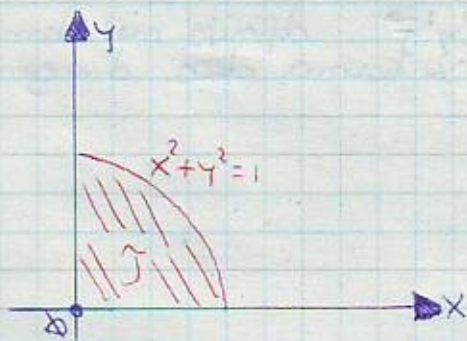


che $\vec{V}$ è irrotazionale:

$$\vec{V} = xy\vec{i} + y^2e^{x^2+y^2-1}\vec{j}$$

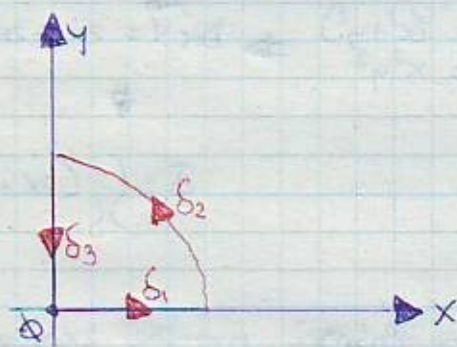
che γ è il dominio limitato illustrato in figura.



4) $\int_{\gamma} \text{div } \vec{V} dy = \int_{\gamma} x dy - y dx \rightarrow$ Questa è la formula della divergenza.

$$\int_{\gamma} \text{div } \vec{V} dy = \int_{\gamma} xy dy - y^2 e^{x^2+y^2-1} dx$$

γ può essere decomposto in tre linee regolari (γ è generalmente regolare).



$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

Però:

$$\int_{\gamma} \text{div } \vec{V} dy = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} (xy dy - y^2 e^{x^2+y^2-1} dx) + \int_{\gamma_3}$$

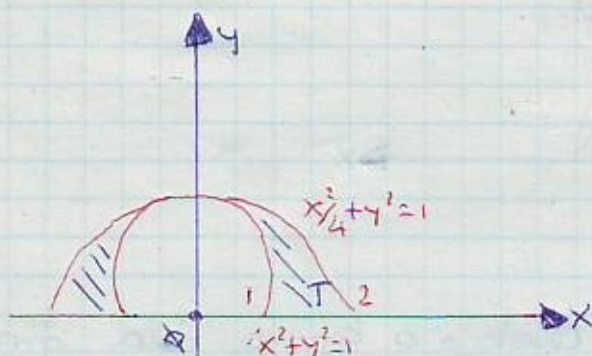
In coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\gamma} \text{Div } \vec{V} dy = \int_0^{\pi/2} [\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \cdot (-\sin \theta)] d\theta = \int_0^{\pi/2} [\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^2 \theta \sin \theta] d\theta$$

$$d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = [-\cos \theta]_0^{\pi/2} = 1$$

- 5) Dato il vettore $\vec{V} = (x^2+y^2)\vec{i} + x^2y^2\vec{j}$ definito nel dominio T raffigurato in figura, calcolare, mediante il teorema della divergenza, il flusso di $\vec{V}$ usante dalla frontiera δ di T .



- 5) Sia Φ il flusso usante da δ si ha per il teorema della divergenza:

$$\Phi = \int_{\delta} \vec{V} \cdot \vec{n} d\delta = \int_T \text{Div } \vec{V} dT$$

Siccome: $\text{Div } \vec{V} = X_x + Y_y$ con $\begin{cases} X = (x^2+y^2) \\ Y = x^2y^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Div } \vec{V} = 2x + 2x^2y$

$$\Phi = \int_T (2x + 2x^2y) dT$$

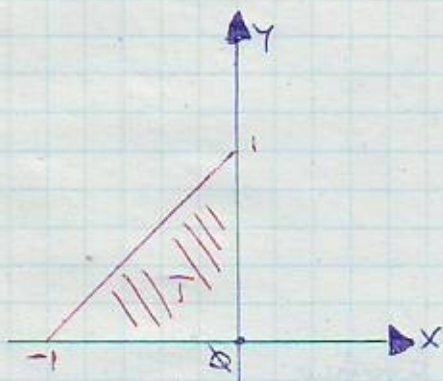
Si noti subito che x è una funzione dispari, mentre $2x^2y$ è pari. Inoltre il dominio T è simmetrico rispetto a y . Quindi:

$$\Phi = \int_T 2x^2y dT = 2 \int_0^1 2y dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2 dx = \frac{2}{3} \int_0^1 2y (7(1-y^2)^{3/2}) dy = \frac{-14}{3} \cdot \frac{2}{5} \left[(1-y^2)^{5/2} \right]_0^1 = \frac{28}{15}$$

6) Calcolare l'area della superficie S di equazione:

$$z = x + \frac{y^2}{2}$$

che si proietta nel dominio T indicata in figura.



$$6) A(S) = \int_S ds \text{ con } ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

Posto:

$$\begin{cases} z_x = 1 \\ z_y = y \end{cases} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + 1 + y^2} = \sqrt{2 + y^2}$$



$$A(S) = \int_T \sqrt{1 + y^2} \, dT$$

Quindi:

$$A(S) = \int_0^1 dy \int_{y-1}^0 \sqrt{2 + y^2} \, dx = \int_0^1 (1 - y) \sqrt{2 + y^2} \, dy$$

Posto: $y = \sqrt{2} \sinh t, \quad dy = \sqrt{2} \cosh t \, dt$



$$\int \sqrt{2 + y^2} \, dy = 2 \int \cosh^2 t \, dt = \int (1 + \cosh 2t) \, dt = t + \frac{1}{2} \sinh 2t =$$

$$= \log \frac{1}{\sqrt{2}} (y + \sqrt{2 + y^2}) + \frac{y}{2} \sqrt{2 + y^2}$$

Integrale:

$$\int y \sqrt{2+y^2} dy = \frac{1}{3} (2+y^2)^{3/2}$$



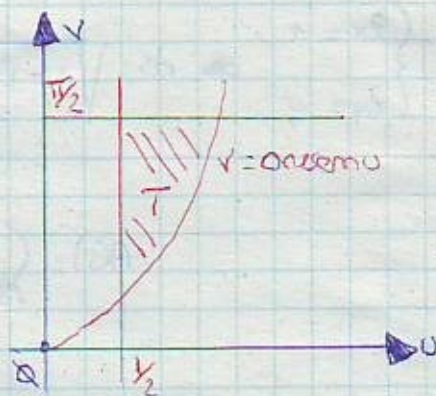
$$A(s) = \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} (y + \sqrt{y^2 + 2}) + \frac{1}{2} \sqrt{y^2 + 2} - \frac{1}{3} (2+y^2)^{3/2} \right]_0^1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

7) Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$I = \int_S \frac{x^2 + y^2}{z^3} ds$$

dove S è la superficie di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \sin(u, v) \\ y = \cos(u, v) \\ z = u \end{cases} \quad \text{con } (u, v) \in T$$



8) Equazione vettoriale:

$$\vec{P} = \vec{0} + \vec{i} \sin(u, v) + \vec{j} \cos(u, v) + \vec{k} u$$



$$\begin{cases} P_u = v \cos(u, v) \vec{i} - v \sin(u, v) \vec{j} + \vec{k} \\ P_v = u \cos(u, v) \vec{i} + \vec{j} \sin(u, v) u + \vec{0} \end{cases}$$

$$\text{Quindi: } P_u \wedge P_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v \cos(u, v) & -v \sin(u, v) & 1 \\ u \cos(u, v) & u \sin(u, v) & 0 \end{vmatrix} = u \sin(u, v) \vec{i} + u \cos(u, v) \vec{j}$$



$$|P_u \wedge P_v| = \sqrt{u^2 \sin^2(u, v) + u^2 \cos^2(u, v)} = |u| = u$$

Quindi:

$$I = \int_S \frac{x^2 + y^2}{z^3} ds = \int_T \frac{\sin^2(\varphi r) + \cos^2(\varphi r)}{u^3} u dT = \int_T \frac{1}{u^2} dT = \dots$$

Consideriamo T normale rispetto all'asse u . Quindi:

$$T = \left\{ \frac{1}{2} \leq u \leq \sin r; \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

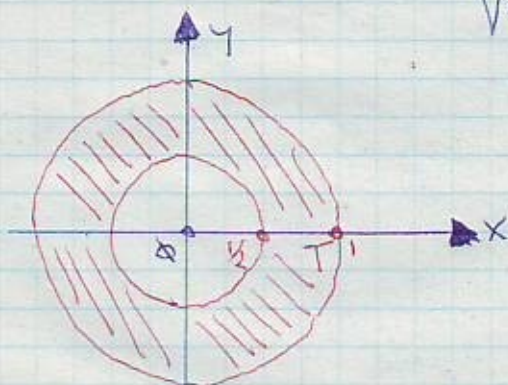
$$\begin{aligned} \int_T \frac{1}{u^2} dT &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{1/2}^{\sin r} \frac{1}{u^2} du = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left[-\frac{1}{u} \right]_{1/2}^{\sin r} d\varphi = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(2 - \frac{1}{\sin r} \right) d\varphi = \left[2\varphi - \log(\tan \frac{\varphi}{2}) \right]_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{3}\pi + \log(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$I = \frac{2\pi}{3} + \log(2 - \sqrt{3})$$

8) Calcolare le seguenti integrali di superficie:

$$\int_S (x^2 + y^2)^2 ds$$

dove S è la porzione della superficie $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, compresa tra i piani $z=1$ e $z=2$.



8) $1 \leq z \leq 2$



$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 2 \Rightarrow \text{Polar: } \begin{cases} z_x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \\ z_y = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \end{cases}$$

Trasformando le tutto in coordinate polari si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_S (x^2+y^2)^2 ds &= \int_T (x^2+y^2)^2 \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^3}} d\tau = \\&= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\frac{1}{2}}^1 \rho^4 \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^4}} \rho d\rho = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \rho^3 \sqrt{1 + \rho^4} d\rho = \frac{\pi}{3} \left[(1 + \rho^4)^{3/2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \\&= \frac{\pi}{3} \left(2\sqrt{2} - \frac{17}{64} \sqrt{17} \right).\end{aligned}$$

* MASSIMI E MINIMI:

Consideriamo una superficie S di equazione $z = f(x, y)$, con $f(x, y) \in C^2(A)$, dove A è un campo del piano xy . Indichiamo poi con $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e $P(x, y, z)$ rispettivamente un punto su S e un punto appartenente ad A proiezione del precedente. Ricordiamo che:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

viene detta **matrice Hessiana**, ed è corrispondente determinante:

$$\det H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

viene detta **determinante Hessiana**. Questa determinante ci illustra la natura di un punto appartenente alla superficie. Se il determinante Hessiano è positivo il punto di coordinate (x, y) viene detto **punto ellittico**, mentre se il determinante Hessiano è negativo tale punto viene detto **punto iperbolico**. Infine se il determinante Hessiano è nullo, il punto viene detto **punto parabolico**. Vediamo quali proprietà. Chiamiamo **funzioni omogenee** quelle funzioni di grado q che godono delle seguenti proprietà:

1) Sia $f(x, y)$ una funzione omogenea, allora:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^q f(x, y)$$

Ad esempio:

$$\sin y/x = f(x, y) \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

$$\downarrow$$

$$\lambda^0 = 1 \Rightarrow \frac{\sin \lambda y}{\lambda^0 x} = \sin y/x$$