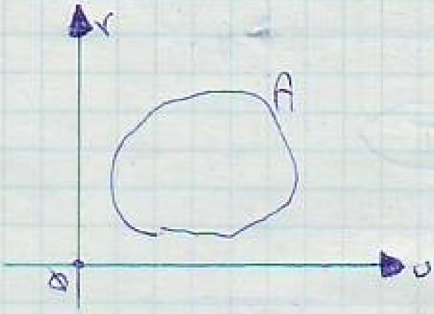
$$\vec{P} = \vec{O} + x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}$$

è il vettore $\vec{PO}$. Si noti che B è un insieme nello spazio xyz e $B = T(A)$. La trasformazione T è regolare nello spazio quando:

1) $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v) \in C^1(A)$



$S = T(A)$ dove S è la varietà superficiale.

2) $A \leftrightarrow S$, cioè si ha la corrispondenza biunivoca in grande tra A e S.
3) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\ \dfrac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)},\ \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \neq 0$
4) Se S è regolare in ogni intorno di ogni suo punto, si può passare dalla rappresentazione parametrica alla rappresentazione cartesiana.

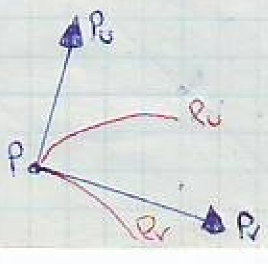
Se la trasformazione T è regolare si ha:

1) Per ogni punto P passa una e una sola linea l_u e l_v.
2) Queste non hanno punti in comune
3) l_u e l_v sono regolari
4) l_u e l_v formano un angolo diverso da zero.

Siano poi:

$$P_u = x_u(u,v)\,\vec{i} + y_u(u,v)\,\vec{j} + z_u(u,v)\,\vec{k}$$
$$P_v = x_v(u,v)\,\vec{i} + y_v(u,v)\,\vec{j} + z_v(u,v)\,\vec{k}$$

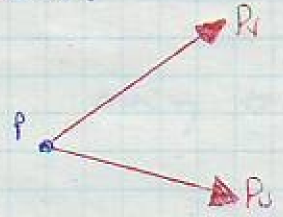
due vettori.



$$P_u \wedge P_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \vec{i}\,\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} + \vec{j}\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \vec{k}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

$$|P_u \wedge P_v| = |P_u| \cdot |P_v| \operatorname{sen}\vartheta = \sqrt{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}^2}$$

Se T è regolare, si ha che $|P_u \wedge P_v| > 0$. In ogni punto $P \in S$ è definito un piano individuato da P_u e P_v.



Questo piano viene detto piano tangente alla superficie nel punto. Sia γ una linea regolare appartenente ad A ($\gamma \in A$). Si ha:

$$T(\gamma) = P \in S \quad \text{anch'essa regolare.}$$

Si ricordi che P è differente da P_u e P_v. Si dimostra che tutte le rette tangenti a tutte le linee regolari passanti per P appartengono al piano individuato dai vettori P_u e P_v. Scriviamo ora l'equazione del piano tangente. Sia:

$$\begin{vmatrix} X-x(u,v) & Y-y(u,v) & Z-z(u,v) \\ x_u(u,v) & y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{vmatrix} = 0$$

Passiamo dalla rappresentazione cartesiana a quella parametrica.

$$z = f(x,y)$$
$$\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$
$$z - \bar{z} = (x-\bar{x}) f_x(\bar{x},\bar{y}) + (y-\bar{y}) f_y(\bar{x},\bar{y})$$

Posto: $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} X-\bar{x} & Y-\bar{y} & Z-\bar{z} \\ 1 & 0 & P_u = z_x \\ 0 & 1 & P_v = z_y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (X-\bar{x})(z_x) + (Y-\bar{y}) z_y + (Z-\bar{z}) z_z = 0$

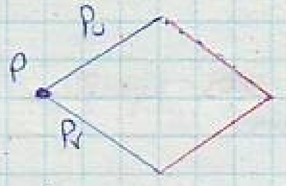
$$\Downarrow$$

$$\Leftarrow \quad Z - \bar{z} = (X-\bar{x}) f_x(\bar{x},\bar{y}) + (Y-\bar{y}) f_y(\bar{x},\bar{y})$$

Sapendo che:

$$\vec{V} = P_u \wedge P_v$$
$$\vec{n} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

Riprendiamo in esame il piano tangente di prima:



$= |P_u \wedge P_v|$

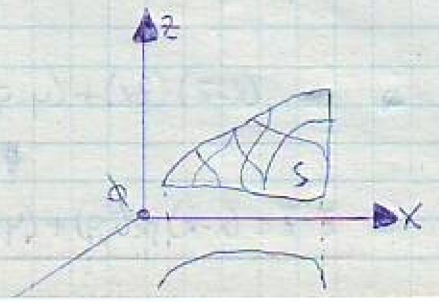
Sotto queste condizioni:

1) $\mathcal{T}$ sia quadrabile $\subset A \Rightarrow T(\mathcal{T}) = \bar{S} \in S$
2) H_δ sia internamente associato a $\mathcal{T}$
3) $T(H_\delta) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m$ e $A(\Omega_k) = |P_u \wedge P_v| + \omega$
4) $\sum_{1}^{m}{}_k A(\Omega_k) = \sum_{1\,k}^{m} |P_u(Q_k) \wedge P_v(Q_k)| + \bar{\omega}$
5) $\lim_{\delta \to 0} \sum_{1}^{m}{}_k |P_u(Q_k) \wedge P_v(Q_k)| = \int_{\mathcal{T}} |P_u \wedge P_v| \, du\, dv$

Sapendo che $|P_u \wedge P_v| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$ si ha:

$$\boxed{A(S) = \int_T \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dT}$$

Per definire l'integrale di volume si procede in questo modo:



Sia S una superficie regolare di equazioni parametriche:

$$x=x(u,v) \quad , \; y=y(u,v) \quad , \; z=z(u,v)$$

Dividiamo il dominio base T in tante parti ΔT_1 e $\Delta T_2 \dots \Delta T_n$ e indicheremo con $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots \Delta S_n$ le corrispondenti parti in cui è suddivisa S. Sia poi P_k un generico punto appartenente a ΔS_k. Si ha:

$$\underline{Q_k = T(P_k)}$$

Sia poi δ il massimo dei diametri di ΔT_k. La somma:

$$\boxed{S_\delta = \sum_{1}^{n}{}_{k} \, f(P_k) \cdot \Delta S_k}$$

viene detta somma integrale della funzione $f(x,y,z)$ sulla superficie S. Se esiste il seguente limite finito:

$$\lim_{\delta \to 0} S_\delta$$

tale limite viene detto integrale della funzione $f(x,y,z)$ sulla superficie S.

$$\boxed{\lim_{\delta \to 0} S_\delta = \int_S f(x,y,z)\, dS}$$

Siccome:

$$\int_S f(x,y,z)\,dS = \int_T f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, |P_u \wedge P_v|\, dT$$

$$\Downarrow$$

$$dS = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\; dT$$

Quindi:

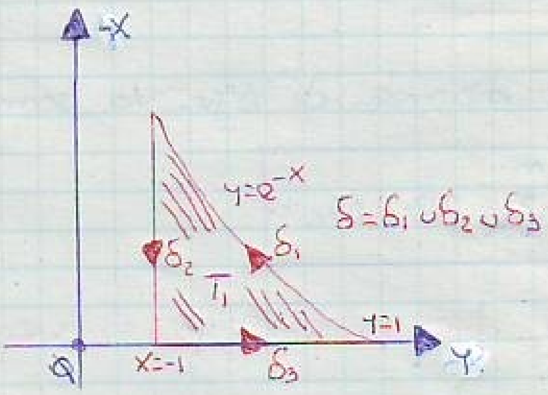
$$\boxed{I = \int_T f(x,y,z)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\; dT}$$

*** ESERCIZI:**

1) Sia data la funzione:

$$f(x,y)=\frac{x\log y}{y\left\{\sqrt{(\log y)^2+x(\log y+|\log y|)+x^2}+1\right\}}$$

e il dominio T_1 considerato in figura:



calcolare l'integrale di $\int f(x,y)\,dT_1$ riconducendosi al calcolo di un integrale di linea mediante la prima formula di Green. (Posto $f(x,y)=Y_x(x,y)$ si determini $Y(x,y)$).

1) Si noti subito che il dominio T_1 è normale rispetto all'asse y.

$$T_1=\left\{-1\le x\le 0\ ;\ 1\le y\le e^{-x}\right\}$$

Si noti inoltre che in T_1 $y\ge 1 \Rightarrow \log y\ge 0$ e quindi:

$$f(x,y)=\frac{x\log y}{y\left\{|\log y+x|+1\right\}}$$

$\log(x+y)\le 0$ essendo $y\le e^x$ e quindi:

$$f(x,y)=\frac{x\log y}{y\left\{1-x-\log y\right\}}$$

Posto: $f(x,y)=Y_x(x,y)$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(x,y) = \int \frac{x\log y}{y(1-x-\log y)}\,dx = -\log y/_y\,(x-(\log y-1)\log(1-x-\log y))$$

Per la prima formula di Green si ha:

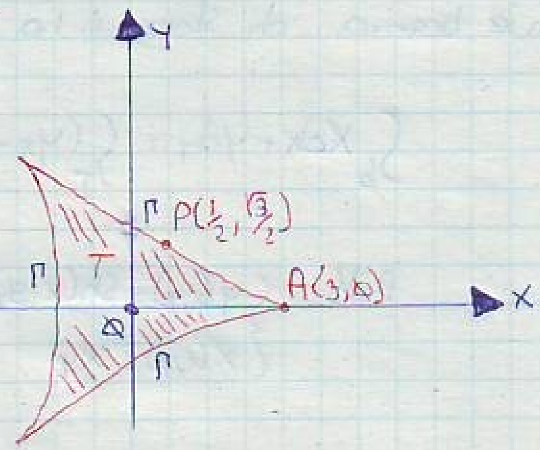
$$\int_{\Gamma_1} f(x,y)\,d\Gamma_1 = \int_\delta \frac{\log y}{y}\left(-x+(\log y-1)\log(1-x-\log y)\right)dy = \int_1^e \frac{(\log y)^2}{y}\,dy + \int_e^1$$

$$\frac{\log y}{y}\left(1+(\log y-1)\log(2-\log y)\right)dy = \left[\frac{(\log y)^3}{3}\right]_1^e + \left[\frac{(\log y)^2}{2}\right]_e^1 + \left[\frac{2(\log y)^3-3(\log y)^2-4}{6}\right.$$

$$\left.\log(2-\log y) - \frac{(\log y)^3}{9} - \frac{(\log y)^2}{12} - \frac{\log y}{3}\right]_e^1 = -\frac{2}{3}\log 2 + \frac{13}{36}$$

2) Calcolare l'area del dominio T tratteggiato in figura avente come frontiera la linea Γ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$



2) $\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 2(-\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)\,dt \\ dy = 2(\cos t - \cos 2t)\,dt \end{cases}$

$\Downarrow$

$$A(T) = \frac{1}{2}\int_\Gamma (x\,dy - y\,dx) = 2\int_0^\pi \{(2\cos t + \cos 2t)\cdot(\cos t - \cos 2t) + (2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)\cdot(\operatorname{sen} t +$$

$$+\operatorname{sen} 2t)\}\,dt = 2\int_0^\pi(-\cos t\cos 2t + 1 + \operatorname{sen} t\operatorname{sen} 2t)\,dt = 2\int_0^\pi (1-\cos 3t)\,dt = 2\pi$$

Quindi:

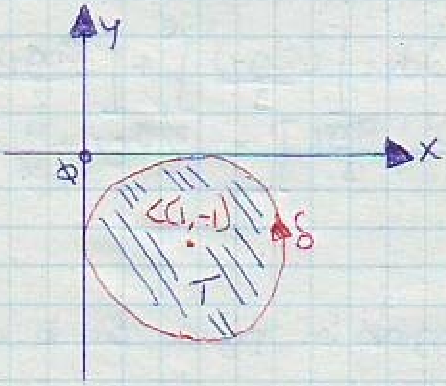
$$A(T) = 2\pi.$$

84)

3) Indicare, applicando il teorema di Stokes, il segno dell'integrale:

$$\int_{\delta} xy^2\,dx + Sh(x-5y)\,dy$$

dove δ è la circonferenza indicata in figura.



3) Per il teorema di Stokes si ha:

$$\int_{\delta} X\,dx + Y\,dy = \int_{T} (Y_x - X_y)\,dT$$

$$\Downarrow$$

Posto: $\begin{cases} Y(x,y) = Sh(x-5y) \\ X(x,y) = xy^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_x = Ch(x-5y) \\ X_y = 2yx \end{cases} \Rightarrow \int_{\delta} xy^2\,dx + Sh(x-5y)\,dy =$

$$= \int_{T} -2yx + Ch(x-5y)\,dy$$

$\int_{\delta} \ldots \geq 0$ per $\int_{T} \ldots \geq 0$, cioè: $-2yx \geq 0$ per $\forall x,y \in T$, e $Ch(x-5y) \geq 1$ per $\forall x,y$

Dunque:

$I > 0$ in J.

4) Calcolare l'integrale:

$$\int_{J} \mathrm{Div}\,\vec{V}\,dJ$$