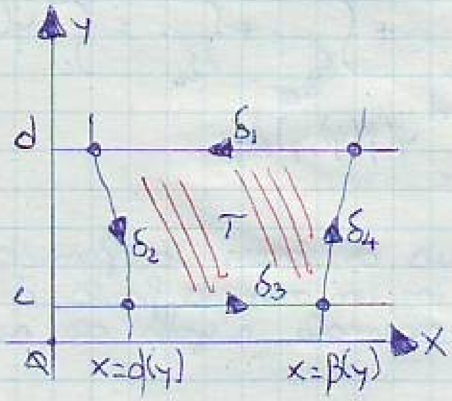
* Formule di Green

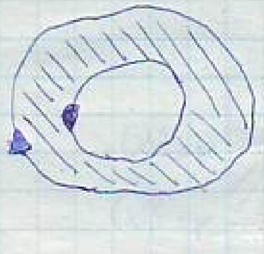
Attraverso le formule di Green è possibile trasformare un integrale doppio in un integrale di linea. Prendiamo in esame il seguente caso:



Considerazioni:

1) L'insieme T è normale rispetto l'asse x, è decomponibile in un numero finito n di domini normali rispetto all'asse x.

2) $FT = \delta$, dove δ è una linea generalmente regolare e orientata in senso positivo (con il dominio alla propria destra). Ad esempio:



3) Siano $Y(x,y)$ e $X(x,y)$ due generiche funzioni $\in C^0(T)$

Da queste considerazioni si ha:

$$\boxed{\int_T Y_x(x,y)\,dT = \int_\delta Y(x,y)\,dy}$$

Questa è la prima formula di Green. Dimostriamola:

$$\int_T Y_x(x,y)\,dT = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \partial/\partial x\, Y(x,y)\,dx = \int_c^d \Big[Y(x,y)\Big]_{\alpha(y)}^{\beta(y)} =$$

$$= \int_c^d \left(Y(\beta(y),y) - Y(\alpha(y),y) \right) dy$$

Siccome:

$$\int_\delta Y(x,y)\,dy = \int_{\delta_1} \dots + \int_{\delta_2} \dots + \int_{\delta_3} \dots + \int_{\delta_4} \dots = \int_c^d Y(\beta(y),y)\,dy + \int_d^c Y(\alpha(y),y)\,dy$$

$$= -\int_c^d Y(\alpha(y),y)\,dy + \int_c^d Y(\beta(y),y)\,dy$$

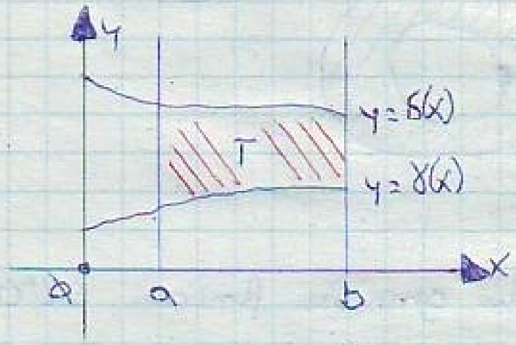
Ecco dimostrata la prima formula di Green. La formula di Green continua a valere se decomponiamo T in un numero finito di domini normali a X. Supponiamo ora che T sia normale rispetto all'asse y. Supponiamo inoltre che:

$$\delta = FT$$

e che $X(x,y)$, $X_y(x,y) \in C^0(T)$. Sotto queste ipotesi si ha:

$$\boxed{\int_T X_y(x,y)\,dT = -\int_\delta X(x,y)\,dx}$$

Graficamente si ha:



La precedente espressione è la seconda formula di Green. Sottraendo membro a membro le due formule di Green si ha:

$$\int_T dT = \int_\delta x\,dy - \int_\delta y\,dx = \int_T dT = \frac{1}{2}\int_\delta x\,dy - y\,dx$$

Quest'ultima relazione è utilissima per il calcolo dell'area di un dominio. Un'immediata conseguenza delle formule di Green sono il teorema di Stokes e il teorema della divergenza. Prima di affrontarli dobbiamo definire due nuove grandezze.

Prendiamo in esame il seguente vettore:

$$\vec{V}(x,y,z) = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$$

si definisce divergenza di $\vec{V}$:

$$\boxed{\mathrm{Div}\,\vec{V} = X_x + Y_y + Z_z}$$

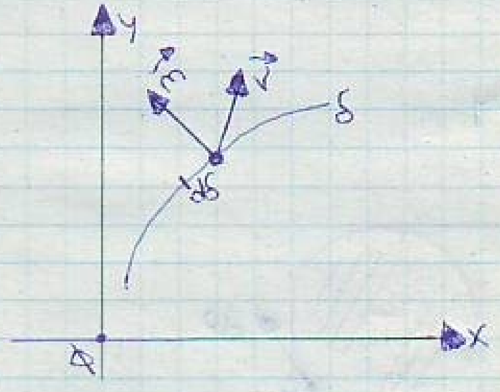
Prendiamo ora in esame il seguente vettore:

$$\vec{V} = X(x,y)\vec{i} + Y(x,y)\vec{j}$$

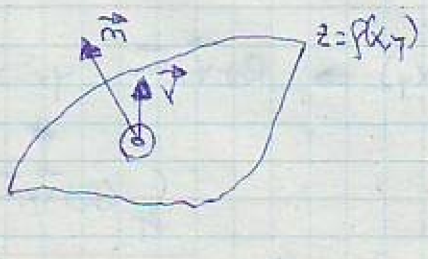
si definisce flusso uscente da δ il seguente integrale:

$$\boxed{\int_{\delta} (\vec{V} \times \vec{n})\, ds = \Phi}$$

Questo rappresenta il flusso attraverso una linea.



Per quanto riguarda la superficie S si ha:



$$\boxed{\int_{S} (\vec{V} \times \vec{n})\, dS = \Phi_S}$$

Effettuando la differenza membro a membro si ottiene:

$$\boxed{\int_T Y_x(x,y)\,dxdy - \int_T X_y(x,y)\,dxdy}$$

Questa relazione rappresenta il teorema di Stokes. Più precisamente sia T un dominio decomponibile in un numero finito di domini normali rispetto a x e in un numero finito di domini normali rispetto a y. Quindi valgono contemporaneamente le due formule di Green. Sottraendole si ha:

$$\int_T \left(Y_x(x,y) - X_y(x,y)\right) dT = \int_\delta \left(X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy\right)$$

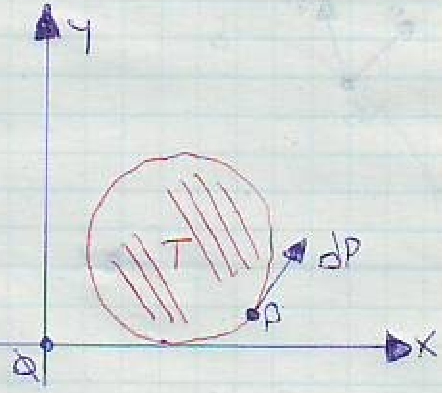
Questo teorema assume un significato più importante quando lo si legge in forma vettoriale. Sia:

$$\vec{V} = X(x,y)\,\vec{i} + Y(x,y)\,\vec{j}$$

e sia:

$$dp = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$$

Graficamente si ha:



$$\mathrm{Rot}\,\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ X(x,y) & Y(x,y) & Z(x,y) \end{vmatrix} = \vec{k}(Y_x - X_y) \Rightarrow \mathrm{Rot}\,\vec{V} \times \vec{n} = Y_x - X_y$$

$$\Downarrow$$

$$\int_T (\mathrm{Rot}\,\vec{V} \times \vec{n})\,dT = \int_\delta \vec{V} \times \vec{dp} = \Phi_{\mathrm{Rot}\,\vec{V}}$$

In breve il versore $\vec{n}$ coincide in P con $\vec{k}$ e quindi:

$$Rot\,\vec{v} \times \vec{n} = Rot\,\vec{v} \times \vec{k} = (Y_x - X_y)$$

L'altra conseguenza delle formule di Green è il teorema della divergenza. Supponiamo che $X, Y, X_x, Y_y \in C^0(T)$. Quindi si ha:

$$1)\ \int_T X_x(x,y)\, dT = \int_\delta X(x,y)\, dy$$

$$2)\ \int_T Y_y(x,y)\, dT = -\int_\delta Y(x,y)\, dx$$

Effettuando la sommatoria membro a membro si ha:

$$\boxed{\int_T (X_x + Y_y)\, dT = \int_\delta X dy - Y dx}$$

Sia ora:

$$\vec{v} = X(x,y)\vec{i} + Y(x,y)\vec{j}$$

un generico vettore. Allora si ha:

$$\boxed{\int_T Div\,\vec{v}\, dT = \int_\delta \vec{v} \times \vec{n}\, d\delta}$$

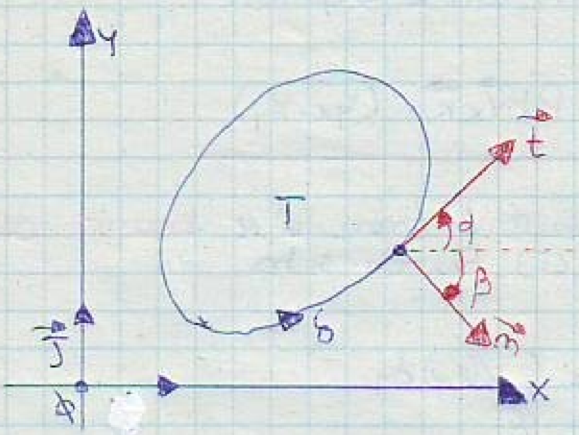
Dimostriamo quest'ultima relazione. Siano:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \quad 0 \le s \le \ell$$

le equazioni parametriche della linea δ e sia $\vec{t}$ il versore tangente a δ.

$$\vec{t} = \vec{i}x'(s) + \vec{j}y'(s) = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\operatorname{sen}\alpha$$

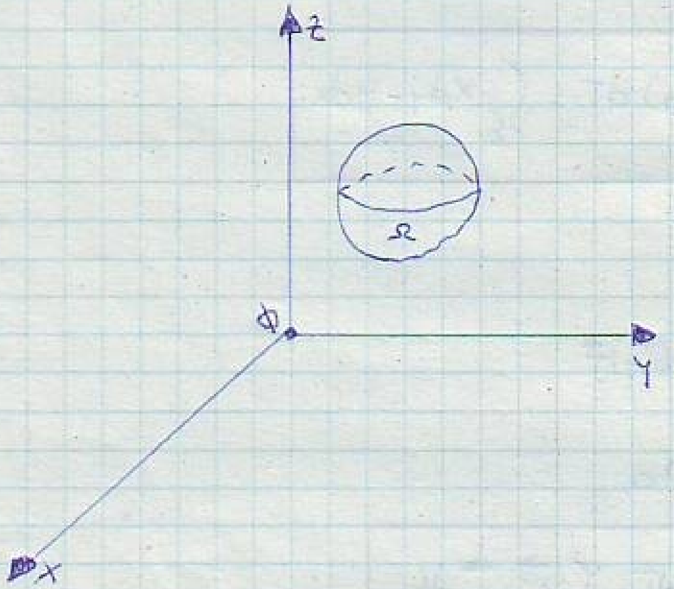
dove α e β sono i seguenti angoli:



$\cos\beta = \sin\alpha \; ; \; \sin\beta = -\cos\alpha$

$\vec{n} = \vec{i}\, y'(s) - \vec{j}\, x'(s)$

Prendiamo ora in esame il seguente insieme Ω nello spazio:

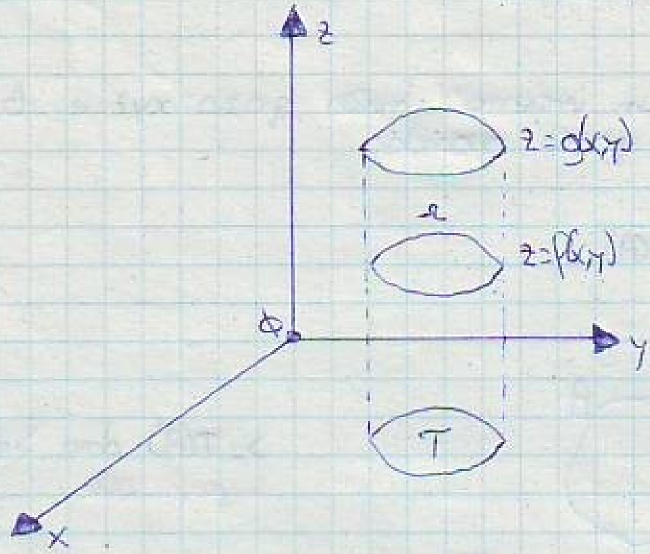


Supponiamo che Ω sia un insieme cubabile, cioè:

$$m(E) = m_i(E)$$

Supponiamo che e sia normale rispetto all'asse z. Ω sia tale che:

$$\Omega : \begin{cases} (x,y) \in T \\ f(x,y) \leq z \leq g(x,y) \end{cases} \quad , \text{ con } f(x,y), g(x,y) \in C^0(T)$$



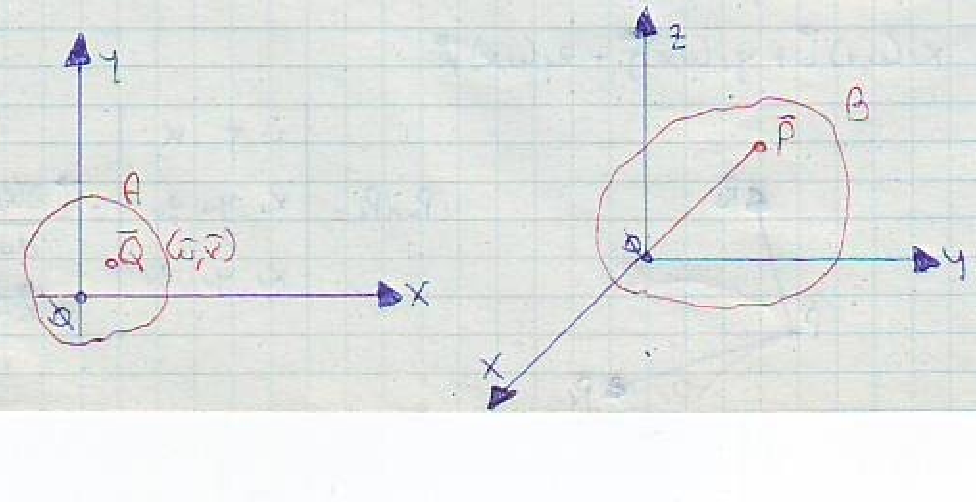
$$\boxed{\int_\Omega F(x,y,z)\,d\Omega = \int_T dx\,dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} F(x,y,z)\,dz}$$

Questo integrale viene detto integrale triplo. Come si può notare l'integrale triplo può essere suddiviso in tre integrali più semplici. Se $F(x,y,z) = 1$ si ha:

$$\boxed{\int_\Omega d\Omega = V(\Omega)}$$

Se $F(x,y,z) \neq 1$, si ha che la grandezza identificata è qualcosa di più grande del volume, e quindi l'integrale non ha un significato geometrico.
Prendiamo ora in esame la seguente trasformazione:

$$T: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \bar{x} = x(\bar{u},\bar{v}) \\ \bar{y} = y(\bar{u},\bar{v}) \\ \bar{z} = z(\bar{u},\bar{v}) \end{cases}$$

$$\boxed{\bar{P} = T(\bar{Q})}$$