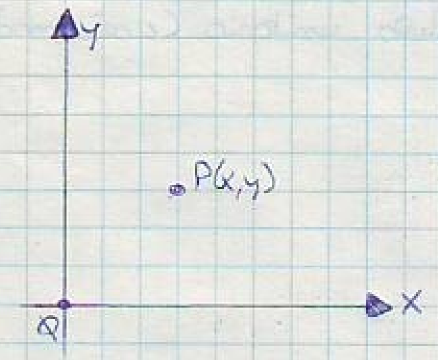
* INTEGRALI DI LINEA:

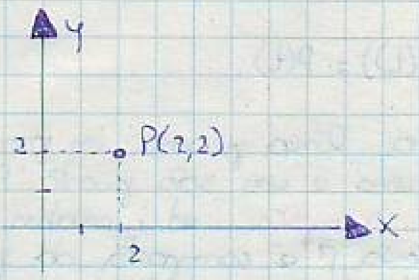
Iniziamo lo studio di Analisi Matematica II con l'introduzione del concetto di integrale di linea. Prendiamo in esame il seguente piano cartesiano:



Un generico punto P su un piano cartesiano viene individuato in modo univoco da due numeri che prendono il nome di coordinate cartesiane del generico punto P del piano. Dunque la posizione del punto P sul piano cartesiano dipende dai valori delle due coordinate x e y. Se ad esempio il punto P è tale che:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

allora il punto P occupa la posizione $P(2,2)$ sul piano cartesiano.



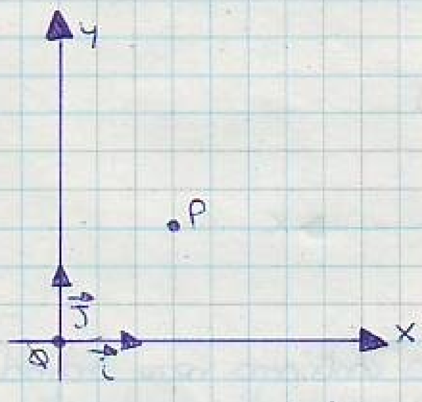
A volte però le stesse coordinate di P possono dipendere da una variabile t. Possiamo fare in modo cioè che le coordinate x e y di P varino al variare di questo t in un determinato insieme. In questo caso si dice che x e y sono funzioni di t, e si indica ciò in questo modo:

$$\boxed{\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}}$$

Supponiamo ora che tali funzioni siano definite e continue per comodità in un dato intervallo T.

$$\boxed{(x(t), y(t) \in C^0(T))}$$

Siano rispettivamente x e y le coordinate cartesiane di un generico punto P del piano xy. Al variare della variabile t in T, il corrispondente punto di coordinate $P(x,y)$ descriverà, muovendosi sul piano, un luogo geometrico Γ che chiameremo linea piana in forma parametrica. Si chiama così perché è una linea che si sviluppa su un piano, e perché le coordinate del punto generico P appartenente a Γ dipendono da una variabile $t \in T$ denominata parametro. L'insieme T viene denominato insieme (intervallo) base. Siano ora $\vec{i}$ e $\vec{j}$ i due versori rispettivamente dell'asse x e dell'asse y del piano xy. Un versore è un vettore di modulo unitario (cioè modulo pari a uno).



In questo modo il generico punto P sul piano cartesiano può essere individuato vettorialmente da un generico vettore di posizione che ha componenti $x(t), y(t)$. Dunque tale vettore, che chiamiamo per comodità $\vec{PO}$ è tale che:

$$\boxed{P = O + \vec{i}\,x(t) + \vec{j}\,y(t)}$$

Si ricordi che:

$$P(x,y) = P(x(t), y(t)) = P(t)$$

Prendiamo ora in esame una linea piana in forma parametrica che chiamiamo Γ. Se per ogni $t \in T$ esiste uno e un solo punto $P = P(t)$ appartenente a Γ, allora la linea Γ viene detta linea semplice ed i relativi punti $P(t)$ vengono detti punti semplici. Se invece la linea Γ è composta da punti $P(t)$ che "derivano" da due parametri t_1 e t_2 distinti ($t_1 \neq t_2$ con $t_1, t_2 \in T$), allora la stessa linea non è semplice e i relativi punti vengono detti punti multipli. Ad esempio nel caso che:

$$\boxed{x = t}$$

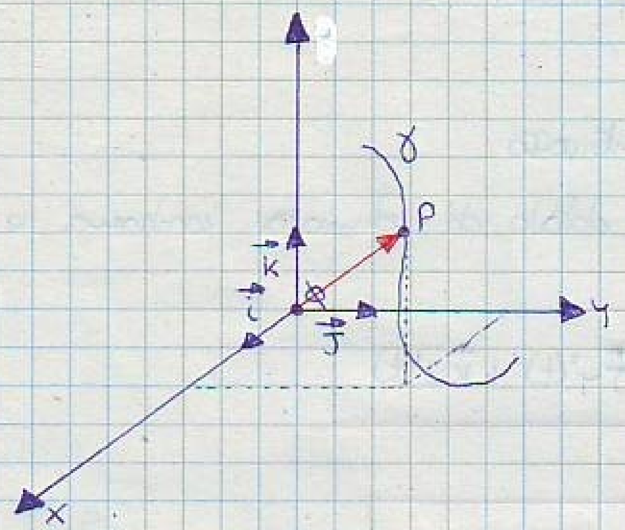
si ottiene una corrispondenza biunivoca tra l'asse delle x e l'intervallo base T, e dunque si ottiene una linea Γ piana e semplice. Si noti che:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

vengono dette equazioni parametriche della linea Γ piana. Supponiamo ora di non essere nel piano bensì di essere in uno spazio. I concetti fin qui esposti non cambiano di molto se non per il fatto che ora bisogna prendere in considerazione una terza coordinata chiamata z che è la quota nel sistema di riferimento.
Dunque:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

rappresentano le equazioni parametriche di una generica linea γ spaziale. Si ricordi infine che $x(t), y(t), z(t) \in C^0(T)$.



In questo caso un generico punto viene individuato in modo univoco da una terna di coordinate:

$$P(x,y,z) = P(x(t), y(t), z(t)) = P(t)$$

Si può individuare lo stesso punto vettorialmente:

$$\boxed{P = O + \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t)}$$

dove $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono i versori degli assi x, y, z. Si noti che nella precedente equazione vettoriale si è aggiunta una terza componente proprio per il fatto che siamo in uno spazio e non in un piano. Con la definizione di linea appena data, si scopre però che anche un punto può essere una linea. Noi vogliamo però una linea, e non un punto, e dunque dobbiamo aggiungere un'ulteriore ipotesi e dire che la linea sia anche regolare. Una linea si dice regolare quando siamo sotto queste ipotesi:

1) la linea sia semplice

2) l'insieme base T sia un intervallo.

3) Il punto $P(t)$ sia dotato, $\forall t \in T$, di derivata non nulla e continua:

$$\boxed{P'(t) = \vec{i}x'(t) + \vec{j}y'(t)}$$

Questo equivale a dire che le derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non siano contemporaneamente nulle.

$$\boxed{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} > 0}$$

Per quanto riguarda una linea spaziale il discorso non cambia di molto.
Una linea spaziale si dice regolare quando:

1) la linea è semplice

2) l'insieme base T è un intervallo

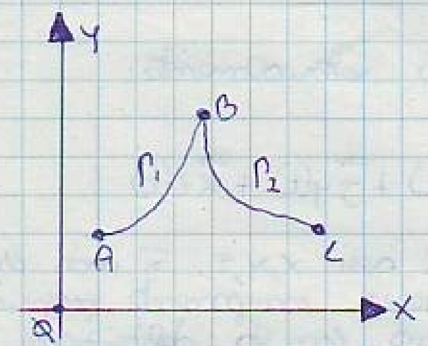
3) il punto $P(t)$, $\forall t \in T$, è dotato di derivata continua e non nulla:

$$\boxed{P'(t) = \vec{i}\,x'(t) + \vec{j}\,y'(t) + \vec{k}\,z'(t)}$$

cioè:

$$\boxed{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} > 0}$$

Inoltre può accadere che una linea si presenti nella seguente forma:



Che la linea sia spaziale oppure piana, non ha molta importanza. Una linea del tipo illustrato in figura viene detta una linea generalmente regolare. Infatti, essa può essere considerata come una linea Γ decomposta in due linee Γ_1 e Γ_2 regolari.

$$\boxed{\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2}$$

Ad esempio una spezzata poligonale è una linea generalmente regolare.
Si consideri ora una linea Γ regolare di equazione vettoriale:

$$P(t) = \vec{i}\,x(t) + \vec{j}\,y(t) + \vec{k}\,z(t) + O$$

dove $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono i versori dei relativi assi. Diamo al parametro t, con $t \in T$, un incremento Δt tale che:

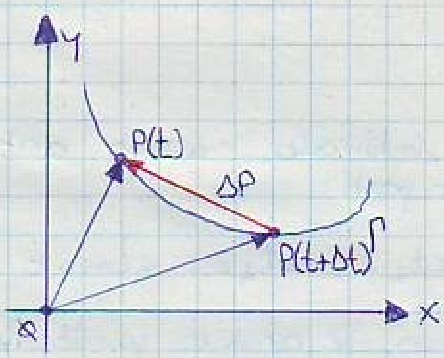
$$\boxed{P(t+\Delta t) = P(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t))}$$

Incrementando il parametro t di Δt si ottiene un punto $P(t+\Delta t) \in \Gamma$, ma tale che:

$$\boxed{P(t) \neq P(t+\Delta t)}$$

essendo la linea regolare. Sia poi $\vec{\Delta P}$ il vettore spostamento e tale che:

$$\boxed{\vec{\Delta P} = \vec{P}(t+\Delta t) - \vec{P}(t)}$$



Si effettui poi il rapporto incrementale:

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}}$$

Siccome:

$$\begin{cases} P(t) = P(x(t), y(t), z(t)) \\ P(t+\Delta t) = P(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t)) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$P(t+\Delta t) - P(t) = P(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t)) - P(x(t), y(t), z(t))$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\vec{k}}$$

Per quest'ultima espressione abbiamo utilizzato la notazione vettoriale:

$$P = O + \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta P = \vec{i}\,\Delta x(t) + \vec{j}\,\Delta y(t) + \vec{k}\,\Delta z(t)$$

Sapendo che:

$$\begin{cases} \Delta x(t) = x(t+\Delta t) - x(t) \\ \Delta y(t) = y(t+\Delta t) - y(t) \\ \Delta z(t) = z(t+\Delta t) - z(t) \end{cases}$$

Effettuando il limite del precedente rapporto incrementale si ottiene:

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = P'(t)}$$

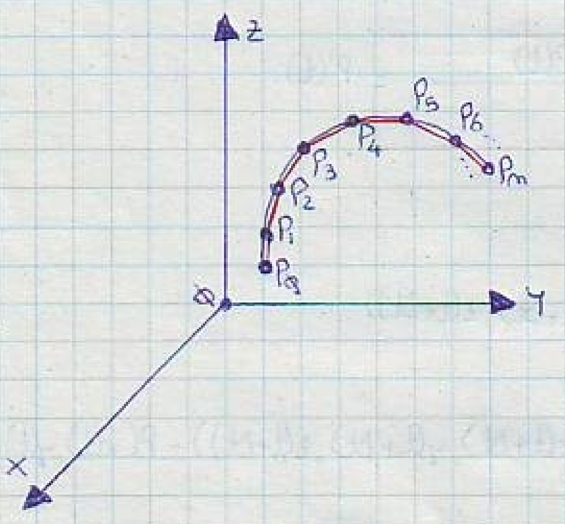
Per la regolarità di Γ, la derivata nel punto $P(t)$ non è mai nulla. Se una linea è regolare è possibile sempre calcolare la tangente in ogni punto della linea stessa. Si abbia ora una linea Γ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

avente come insieme base T un intervallo chiuso $a^{\frown}b$. Supponiamo che $a<b$. Si suddivida tale intervallo in m parti:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \ldots < t_m = b$$

Per ogni t_K corrisponde sulla linea il generico punto P_K. Si ottiene perciò una linea di questo tipo:



Una linea così fatta prende il nome di linea rettificabile perché si può definire su di essa una lunghezza. Sia poi δ il massimo delle differenze:

$$t_K - t_{K-1} \quad \text{con } K = 0,1,2,3,\ldots,m$$

Unendo sulla linea Γ i vari punti P_K trovati si ottiene una spezzata poligonale Γ_δ inscritta nella linea Γ. Per definizione la lunghezza di tale spezzata è data da:

$$\boxed{S_\delta = \sum_{1}^{m}{}_K \overline{P_K P_{K-1}}}$$

Per δ tendente a zero, la spezzata si va a confondere con la linea Γ. Perciò:

$$S_\delta = \sum_{1}^{m}{}_{k} \overline{P_k P_{k-1}} = \sum_{1}^{m}{}_{k} \sqrt{(x(t_k - t_{k-1}))^2 + y(t_k - t_{k-1})^2 + z(t_k - t_{k-1})^2} =$$
$$= \sum_{1}^{m}{}_{k} \sqrt{\left[x(t_k) - x(t_{k-1})\right]^2 + \left[y(t_k) - y(t_{k-1})\right]^2 + \left[z(t_k) - z(t_{k-1})\right]^2}$$

Dobbiamo ora dimostrare che:

$$\boxed{\lim_{\delta \to 0} S_\delta = S}$$

Siano $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ dei punti interni a $\overline{t_{k-1} t_k}$. Per il teorema di Lagrange si ha che:

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\alpha_k)(t_k - t_{k-1})$$
$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\beta_k)(t_k - t_{k-1})$$
$$z(t_k) - z(t_{k-1}) = z'(\gamma_k)(t_k - t_{k-1})$$

Quest'ultima relazione l'abbiamo ottenuta sapendo che:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

Più precisamente il teorema di Lagrange afferma che sia $f(x)$ una generica funzione continua nell'intervallo $a \cap b$ e derivabile in punti interni a tale intervallo. Esiste almeno un punto $\xi \in a \cap b$ tale che:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} = f'(\xi)}$$

Dunque: $S_\delta = \sum_{1}^{m}{}_{k} \sqrt{(x'(\alpha_k))^2 + (y'(\beta_k))^2 + (z'(\gamma_k))^2}\,(t_k - t_{k-1})$

Perciò si ottiene:

$$\lim_{\delta \to 0} S_\delta = \lim_{\delta \to 0} \sum_{1}^{m}{}_{k} \sqrt{(x'(\alpha_k))^2 + (y'(\beta_k))^2 + (z'(\gamma_k))^2}\,(t_k - t_{k-1}) =$$
$$= \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$